Chapitre II
Dynamique du point

Ce sont les .... qui sont responsables du mouvement d'un système, les forces étant les causes, les trajectoires étant les conséquences.

Pour des vitesses **faibles devant celle de la lumière**, les lois de Newton permettent de modéliser les problèmes de mécanique et prédire l'évolution du mouvement d'un système.

Collège (cycle 4)

- Structure de l'Univers et du système solaire.
- Identifier les actions mises en jeu (de contact ou à distance) et les modéliser par des forces.
- Situations d'équilibre statique (balance, ressort, muscles).
- **Force** : direction, sens et valeur.
- Force de pesanteur et son expression $P = mg$.

Seconde

- Principe des actions réciproques (**troisième loi de Newton**).
- Distinguer actions à distance et actions de contact.
- Exemples de forces : force d'interaction gravitationnelle, poids, force exercée par un support et par un fil.
- Utiliser l'expression vectorielle de la force d'interaction gravitationnelle.
- **Principe d'inertie**. Cas de situations d'immobilité et de mouvements rectilignes uniformes.
- Cas de la chute libre à une dimension.

Première (spé)

- Force de gravitation et champ de gravitation.
- Utiliser les expressions vectorielles : de la force de gravitation.

Terminale (spé)

- **Deuxième loi de Newton**. Utiliser la deuxième loi de Newton dans des situations variées.
- Équilibre d'un système.
- En déduire le vecteur accélération du centre de masse, les forces appliquées au système étant connues.
- En déduire la somme des forces appliquées au système, le mouvement du centre de masse étant connu.
- Mouvement dans un champ de pesanteur uniforme.
- Montrer que le mouvement dans un champ uniforme est **plan**.
- Établir et exploiter les équations horaires du mouvement. Établir l'équation de la trajectoire.
- **Poussée d'Archimède**. Utiliser l'expression vectorielle de la poussée d'Archimède.

Grandeurs physiques :

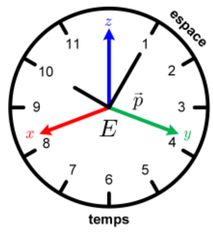
Grandeur physique	Symbole	Unité (Unité du S.I.)	Dimension	Apparition
quantité de mouvement	$\vec{p}$			New!
force	$\vec{F}$			Cycle 4 ($3^{\text{ème}}$)
intensité de la pesanteur	$\vec{g}$			Cycle 4 ($3^{\text{ème}}$)
raideur d'un ressort	k	N.m^{-1}		New!

S.I. : T : temps, L : longueur, M : masse, I : intensité, Θ : température, N : quantité de matière

MATHS

- Vecteurs, coordonnées, projections, dérivées, différentielles.

I. Lois de Newton (1687)



A. Quantité de mouvement

1. Système ponctuel

La **quantité de mouvement** ou impulsion est une grandeur fondamentale en physique tout comme l'énergie puisqu'elle se conserve pour un système **isolé** dans un référentiel galiléen. Elle est définie pour un point M de masse m dans un référentiel R par :

$$\boxed{\qquad = \qquad}$$ (produit masse vitesse)

On omettra par la suite l'indice R relatif au référentiel pour simplifier les notations.

2. Système barycentrique

On rappelle que pour le système {Terre-Lune}, G est tel que : $m_{tot}\overrightarrow{OG} =$

En dérivant par rapport au temps : $\ldots$

D'où $\qquad = \qquad + \qquad$ avec $\vec{v}(G), \vec{v}(T), \vec{v}(L)$ les vitesses des points G, T, L.

Les quantités de mouvements sont définies par $\vec{p}(T) =$ $\qquad$, $\vec{p}(L) =$

Ainsi, les quantités de mouvements des masses ponctuelles d'un système s'ajoutent :

$$\boxed{\vec{p} = \qquad\qquad}$$ où $m_{tot} = m_T + m_L$ (masse totale)

où $\vec{p}$ est **la** .... du système

Cas général d'un système de N corps de masses m_i assimilées à des points M_i :

$$\boxed{\vec{p} = \qquad\qquad}$$ où $m_{tot} = \sum_i^N m_i$ (masse totale)

B. Problème du parachutiste

On considère un parachutiste en chute libre rectiligne.
Après un certain temps *i.e.* un régime transitoire, la vitesse du parachutiste tend vers une vitesse limite $v_{\lim}$ d'environ 180 km/h à plat ventre pour un homme de 70 kg.

Objectif : Retrouver cette valeur en modélisant le problème à l'aide des lois physiques.

1 . Principe d'inertie

Après un certain temps, le parachutiste est en .... (MRU) et comme il est soumis à plusieurs forces alors cet ensemble de forces doivent .... *i.e.* selon Newton, leur **résultante** au centre de gravité G doit être nulle :

> 1ère loi de Newton :
> *"Tout corps persévère dans l'état de repos ou de mouvement uniforme en ligne droite dans lequel il se trouve, à moins que quelque force n'agisse sur lui, et ne le contraigne à changer d'état."*

Principe d'inertie : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$

Le principe d'inertie s'applique à des systèmes en **....................................**

Pour un système en MRU, $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$ ou $\vec{p} = m\vec{v} = \overrightarrow{cste}$ ou $\boxed{\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \quad}$

Si la masse est **constante**, $m = cste \Leftrightarrow \dfrac{\dots\dots}{\dots\dots} = \dots$ alors

Pour un système à masse constante **.................** dans le référentiel choisi, $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{p} = \vec{0}$.

Il existe plusieurs moyens de transport : ....

Où se sent-on le plus en sécurité et pourquoi ?

Le ...., le .... et .... sont les moyens de transport les plus sûrs où on se sent le plus en sécurité car sans problème d'intempérie, ils sont en **mouvement rectiligne uniforme** la majorité du trajet *i.e.* .... On garde nos points de repère *i.e.* les lois physiques s'appliquent de la même façon dans ces transports que lorsqu'on est .... par rapport au sol terrestre apportant une certaine **..............** (écrire, se déplacer, jouer : les mouvements des personnes et des objets sont similaires).

> Au sens de la mécanique Newtonienne, un **référentiel galiléen** est un référentiel dans lequel le principe d'inertie s'applique : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$

Soit 2 référentiels galiléens en translation rectiligne par rapport au référentiel terrestre : un TGV à $v_{R_1} = \dots\dots\dots \ \mathrm{km.h^{-1}} = 100 \ \mathrm{m.s^{-1}}$ et un avion à $v_{R_2} = 900 \ \mathrm{km.h^{-1}} = \dots\dots\dots \ \mathrm{m.s^{-1}}$

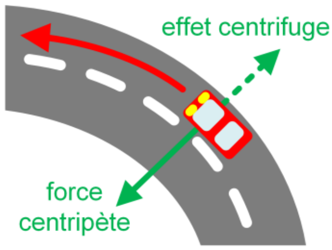
Compléter le tableau suivant : (oui, certaines vitesses sont négatives)

vitesse dans le...	référentiel terrestre	référentiel du TGV	référentiel de l'avion
objet immobile / Terre	0		
TGV	100		
avion			
lumière dans le vide	c		

La vitesse d'un objet est donc ***relative*** *au référentiel, d'où l'indice lié au référentiel* $\overrightarrow{v_{\boxed{R}}}(M)$.

En ……………, les virages imposent des mouvements non rectilignes et donc des effets centrifuges gênants. En ………, la trajectoire est très souvent droite mais les accélérations et les freinages dues à chaque station conduisent à une sensation d'…………………

Exemple d'un effet centrifuge : dans une voiture choisie comme référentiel, lors d'un virage à gauche, un objet **immobile** par rapport à la voiture et soumis à **aucune force extérieure**, va se déplacer spontanément dans le sens opposé à la concavité *i.e.* vers la ……………… donc le principe d'inertie ne s'applique pas.



2 . Principe fondamental de la dynamique (PFD)

2ème loi de Newton : *"L'altération du mouvement est proportionnelle à la force qui lui est imprimée ; et cette altération se fait en ligne droite dans la direction de la force."*

L'altération du mouvement est la variation par rapport au temps de la quantité de mouvement $\vec{p}$ du système *i.e.* ……………… Dans les unités du S.I., elle est directement égale à la résultante des forces appliquées au système **dans un référentiel galiléen** :

2ème loi de Newton ou Principe fondamental de la dynamique : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{forces} \overrightarrow{F_{ext}}$

Si la masse est constante, $\dfrac{d\vec{p}}{dt} =$

La 2ème loi de Newton s'applique à des systèmes ……………………………………

On l'appelle aussi …………………………………………………………

➢ ***Bilan des forces sur le parachutiste :***

Le parachutiste assimilé à son centre de masse G est soumis à :

✓ …………………………

✓ ………………………………………………………………………………

✓ …………………………………………………………

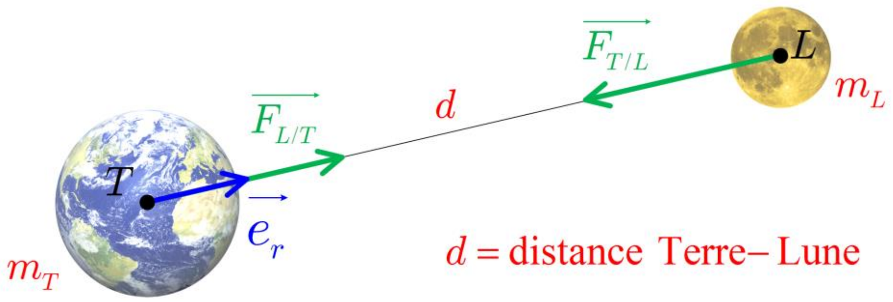
Avant d'atteindre une vitesse limite : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} =$

Simplicius : Dans un problème de mécanique, on applique la 2ème loi de Newton.
Sagredo : Il faut faire un schéma, repérer son système, choisir un référentiel, choisir un repère, faire un bilan de forces et seulement après, on applique la 2ème loi de Newton.
Salviati : Comme pour la loi des mailles en électricité (chapitre III page 7), il ne faut pas se précipiter sur la 2ème loi de Newton mais bien poser le problème pour éviter les erreurs. Le temps qu'on perd au début à poser le problème, sera du temps gagné pour la suite.

C . Force de gravitation

Les forces sont les actions qui entraînent le mouvement et leur unité est **N ("Newton").** D'après le principe d'inertie dans un référentiel galiléen, un système .... de toute force est soit immobile $\left(\vec{p}=\vec{0}\right)$, soit en MRU $\left(\vec{p}=\overrightarrow{cste}\right)$.

1 . Loi de l'action et de la réaction



La Lune et la Terre exercent l'une sur l'autre des forces gravitationnelles .... :

$$\overrightarrow{F_{L/T}} =$$

> 3ème loi de Newton :
> *"Pour chaque action, il existe une réaction égale et opposée : l'action est toujours égale à la réaction : les forces de deux corps l'un sur l'autre sont toujours égales mais dirigées en sens contraire."*

Salviati : Ce principe est rarement utilisé pour réaliser des calculs sur les forces.
Il est un postulat de nombreux phénomènes physiques pour le modèle de système **isolé** de toute force : aimants ou charges qui s'attirent ou se repoussent, patineurs qui se repoussent sur la glace, force de rappel d'un ressort égale à l'opposé de la force de Hooke.

On considère le système {Terre-Lune}, les forces $\overrightarrow{F_{L/T}}$ et $\overrightarrow{F_{T/L}}$ sont des forces .... au système et la .... des forces intérieures $\overrightarrow{F_{int}}$ est telle que :

$$\overrightarrow{F_{L/T}}+\overrightarrow{F_{T/L}}=\vec{0} \text{ ou plus généralement, } \boxed{}$$

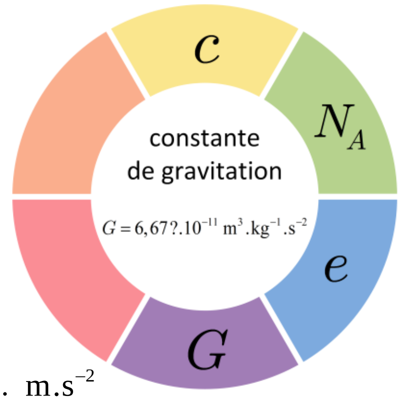
La somme des forces **intérieures** à un système est .... contrairement aux forces extérieures qui sont la cause des mouvements des systèmes. Pour le système {Terre-Lune}, les **forces extérieures** au système sont les .... : $\overrightarrow{F_{S/T}}$ et $\overrightarrow{F_{S/L}}$.

2 . De la gravitation à la pesanteur

On se place dans le référentiel géocentrique et dans un repère sphérique ayant pour origine le centre de la Terre, la Lune subit une force gravitationnelle exercée par la Terre Terre :

$\overrightarrow{F_{T/L}}=-\overrightarrow{F_{L/T}}=$ avec $r=d\approx 380\ 000\ \text{km}=3,8.10^8\ \text{m}$ (force centripète).

$G = 6,67.10^{-11}$ ………………… , il s'agit de la **constante universelle de gravitation**.



Cette force se réécrit sous la forme : $\overrightarrow{F_{T/L}} =$

avec $\overrightarrow{g_T} =$ le …………………………………………

➢ Pour la Lune, $m_T = 5{,}98 \times 10^{24}$ kg donc $\left\|\overrightarrow{g_T}\right\| \approx$

➢ Pour le parachutiste, soit h son altitude,

$r = R_T + h =$ avec $h \approx qq$ km $<< R_T$ donc $\left\|\overrightarrow{g_T}\right\| \approx$…… m.s^{-2}

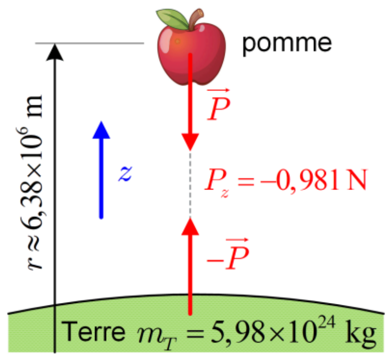
Modèle du champ de pesanteur uniforme :

Hyp.1 : On néglige ……………… $h << R_T$

Hyp.2 : ……………………………………………………………………………………

Hyp.3 : On néglige les forces d'inertie (hors programme).

$\overrightarrow{g_T} =$ d'où $\overrightarrow{F_{T/P}} = m\vec{g}$



Le poids d'un objet s'écrit donc $\vec{P} = m\vec{g}$

où m est la masse de l'objet en kg et $\vec{g}$ est l'intensité de la pesanteur dont la norme est en m.s^{-2} dirigée vers le centre de la Terre. Dans un champ de pesanteur …………………, $\vec{g} = \overrightarrow{cste}$, constant en direction, en sens et en norme.

En réalité, ce n'est vrai que lorsque l'altitude reste la même or lors d'une chute libre, l'altitude varie donc considérer g constant constitue une hypothèse **conséquente**.

Si le parachutiste n'était soumis qu'à son poids dans un champ de pesanteur ………………, on appliquerait la 2ème loi de Newton : d'où $\vec{a} =$

Sans frottement, un corps soumis uniquement à son poids est en mouvement à **vecteur-accélération constant**, il n'y aurait donc pas de limite à la vitesse (Chapitre I page 6).

Les mouvements sont …………………… si $\vec{v_0} // \vec{P}$ ou …………………… sinon.

D . Force de frottement

Les forces de frottement peuvent être fluides ou solides. Comme leur nom l'indique, des frottements solides ont lieu entre deux solides, c'est l'objet du cours de MP avec la loi de Coulomb, **@Sagredo** une autre loi que celle de l'électrostatique vue en 1ère et Term.

Concernant le parachutiste, les frottements avec l'air se modélisent sous la forme de frottements **fluides** tout simplement parce que l'air est un fluide.

1 . Modèles de frottement fluide

➢ Si la résistance à l'air a un comportement supposé **linéaire** :

avec où $\alpha > 0$ et $\vec{v}$ la vitesse de l'objet

En toute rigueur, la norme de la force de frottement est **proportionnelle** à la norme de la vitesse de l'objet. .... *i.e.* $\vec{f}$ et $\vec{v}$ sont ....

➢ Si la résistance à l'air a un comportement supposé **non linéaire** :

avec où $\alpha, \beta, \gamma, \ldots > 0$.

Si $\alpha = \gamma = \ldots = 0$ mais $\beta \neq 0$ alors la force de frottement s'appelle .... :

$\boxed{\vec{f} = \quad}$ avec $\boxed{\left\|\vec{f}\right\| = \quad}$

2 . Un point sur le problème du parachutiste

Concernant la poussée d'Archimède, $\overrightarrow{\pi_{\text{fluide}}} = -\overrightarrow{P_{\text{déplacé}}} =$ avec $\rho_{\text{fluide}} = \dfrac{m_{\text{fluide}}}{V_{\text{fluide}}}$

*Tout corps plongé dans un fluide (gaz, liquide) subit une poussée verticale dirigée de bas en haut égale au poids du **volume de fluide déplacé**.*

Pour le parachutiste, $\rho_{\text{fluide}} = \rho_{air} = 1{,}2\ \text{kg.m}^{-3} = 1{,}2.10^{-3}\ \text{kg.L}^{-1}$ et $V_{para} = 75\ \text{L}$, $m = 70\ \text{kg}$.

Ordres de grandeur : $\dfrac{\pi_{air}}{P} =$ donc π_{air}

Quel que soit le modèle de frottement, on admet que π_{air} (en prenant $\beta \approx 0{,}3$).

La poussée d'Archimède est .... devant le poids et la force de frottement :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{P} + \vec{\pi} + \vec{f} \approx \qquad \text{car}$$

En utilisant un repère cartésien adapté au problème, on peut projeter les vecteurs sur un seul axe Oz vertical .... Une projection vectorielle revient à faire un produit scalaire avec le vecteur unitaire de l'axe en l'occurrence $\overrightarrow{e_z}$ (Chapitre I page 15).

Selon l'axe Oz ,

Le poids s'écrit $\vec{P} =$ et la force de frottement **linéaire** s'écrit : $\vec{f} =$

Ici, $v_x \ldots 0, v_y \ldots 0, v_z \ldots 0$ donc $\left\|\vec{v}\right\| = v =$

$\left\|\vec{P}\right\| = P =$ et $\left\|\vec{f}\right\| = f =$

…

Il s'agit d'une équation linéaire du 1er ordre à coefficients constants **avec** 2nd membre.

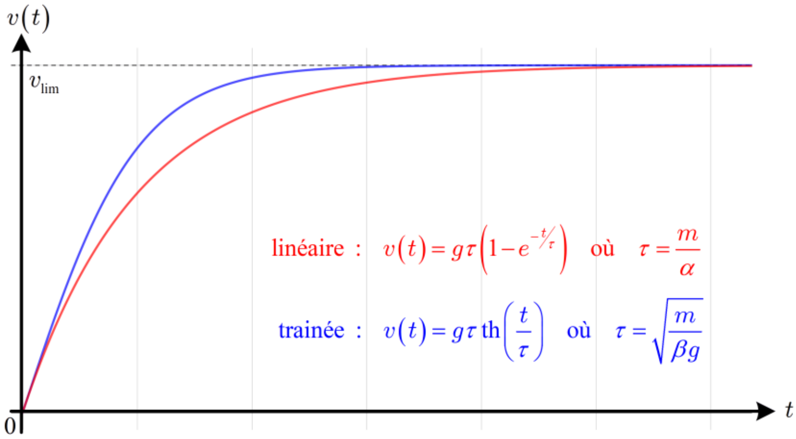
$\dfrac{dv}{dt}$ est le terme d'………………, $\dfrac{\alpha}{m}v$ le terme de ……………… et g le terme de ……………

En posant $\tau = \dfrac{m}{\alpha}$, on peut montrer que $v = g\tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. On obtient $v_{\lim} = \lim\limits_{t\to+\infty} v = \ldots\ldots$

Après un certain temps, $t > 5\tau$, la solution homogène $v_h(t) = -g\tau e^{-t/\tau}$ devient négligeable devant la solution particulière $v_p(t) = g\tau$ donc la vitesse limite est la solution particulière :

… puisque $\dfrac{dv_{\lim}}{dt} = 0$

Physiquement, le parachutiste n'est soumis au départ qu'à son …………… dirigé vers le bas.
Puis sa vitesse augmentant, la force de frottement devient de plus en plus grande vers le haut jusqu'à ……………………………
Pour un temps suffisamment grand, la force de frottement et le poids ………………… et d'après le principe d'inertie, le parachutiste n'étant soumis à aucune force atteint ……………………………………………………………………



3 . Résolution du problème

A des vitesses relativement importantes comme lors de la chute libre d'un parachutiste, le frottement **n'est pas** linéaire et la modélisation est réaliste pour un comportement en v^2.

Le poids s'écrit $\vec{P} = -mg\vec{e_z}$ et la force de **trainée** s'écrit : $\vec{f} = -\beta v v_z \vec{e_z}$ avec $f = \beta v^2$

…

Il s'agit d'une équation **non** linéaire du 1er ordre à coefficients constants **avec** 2nd membre.

@Simplicius, @Sagredo Ce n'est pas la même équation qu'une cinétique du 2nd ordre car il y a un 2nd membre et il n'y a pas de solution homogène car elle est non linéaire.

Cependant, le second membre montre l'existence d'un régime permanent où la vitesse devient constante atteinte après un régime transitoire pendant lequel la vitesse va augmenter puis va tendre vers une vitesse limite.

Même méthode : … puisque $\dfrac{dv_{\lim}}{dt} = 0$

L'équation différentielle peut se réécrire : $\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m} v^2 = g \quad \Leftrightarrow$

D'où l'équation : qu'on réécrit encore : $\boxed{}$

Pour $v = 0$, $\frac{dv}{dt} =$, c'est l'état initial où le parachutiste subit la pesanteur.

Pour $v = v_{\lim}$, $\frac{dv}{dt} =$, l'accélération est nulle, le principe d'inertie s'applique.

Les modèles de trainée donnent $\beta = \frac{1}{2} \rho_{air} C_x S$ avec ρ_{air} la masse volumique de l'air, C_x le coefficient de trainée et S le maître-couple ou surface en contact avec l'air.

$\rho_{air} = 1{,}2 \text{ kg.m}^{-3}$, $C_x \approx 0{,}75$ et $S \approx 0{,}6 \text{ m}^2$ d'où $\beta \approx \ldots\ldots\ldots$ et $v_{\lim} \approx \ldots\ldots$ $\text{m.s}^{-1} = \ldots\ldots$ km.h^{-1}

Le modèle et ses paramètres semblent réalistes avec la valeur proposée à la page 2.

4 . Equation adimensionnée

Lorsque l'équation ne peut être résolue, on peut réaliser des changements de variable pour en tirer des informations supplémentaires. On définit les grandeurs suivantes :

et

Ces grandeurs n'ont pas d'unité, elles sont ...., les grandeurs $t_{\text{réf}}$ et $v_{\text{réf}}$ sont des constantes de référence de temps et de vitesse et on recherche leurs valeurs.

On reporte dans l'équation différentielle :

…

Comme les grandeurs X et Y, chaque terme de la nouvelle équation n'a pas d'unité donc l'équation est dite **adimensionnée**. Par construction, on propose donc que :

$$\begin{cases} \dfrac{\ldots\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots & (1) \\ \dfrac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots\ldots} = \ldots & (2) \end{cases}$$ système de 2 équations à 2 inconnus $t_{\text{réf}}$ et $v_{\text{réf}}$

$(2) \Leftrightarrow t_{\text{réf}} =$ qu'on réinjecte : $(1) \quad \Leftrightarrow$

Par cette méthode d'adimensionnement, on retrouve la valeur de ....

On remarque que $t_{\text{réf}} =$

C'est un temps caractéristique du régime transitoire *i.e.* c'est l'ordre de grandeur de la ……………………………………………………………………………………………

On peut fabriquer $\ell_{\text{réf}} =$

C'est une longueur caractéristique du régime transitoire *i.e.* c'est l'ordre de grandeur de la ……………………………………………………………………………………………

II . Oscillateur harmonique (1ère partie)

Un solide est assimilé à un point matériel M de masse m et peut glisser le long d'une tige horizontale fixe dans le référentiel terrestre supposé galiléen ; il est relié à un ressort OM élastique. L'intensité de la pesanteur notée $\vec{g}$ est perpendiculaire à la droite (OM).
Sa **…………………………………** *i.e.* longueur sans masse accrochée est notée l_0 :

Objectif : décrire le déplacement de la masse lorsque le ressort a été comprimé ou étiré à un instant initial. Il s'agit de déterminer la position $x(t)$ du point M à chaque instant en établissant un modèle le plus simplifié possible en supposant le ressort **étiré** au départ.

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

A . Description du système

1 . Système, référentiel, repère

Système : le point M
Référentiel : ………………, ………………………………
On suppose donc que la durée de l'étude est assez courte pour ne pas tenir compte de la rotation de la Terre dans le mouvement du point M.
Repère : cartésien plan xOy $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y})$

2 . Bilan des forces

Compléter le schéma avec l'ensemble des forces qui s'appliquent sur M

- *Poids de la masse :* $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_y}$ (modèle de force exercée par la Terre sur la masse)
- ....
- ....
- ....
- .... avec f le coefficient de frottement solide
- ....

Hyp. 1 : .... $(\vec{f}, \vec{T}, \vec{\pi})$

Hyp. 2 : On néglige la masse du ressort $m_r << m$ donc son poids $P_r << P$

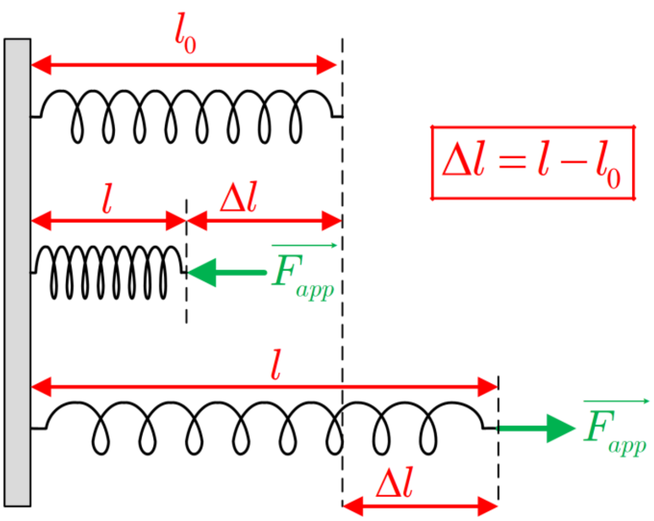
A l'équilibre, le point M est en $OM = l_0$, la 1ère loi de Newton donne :

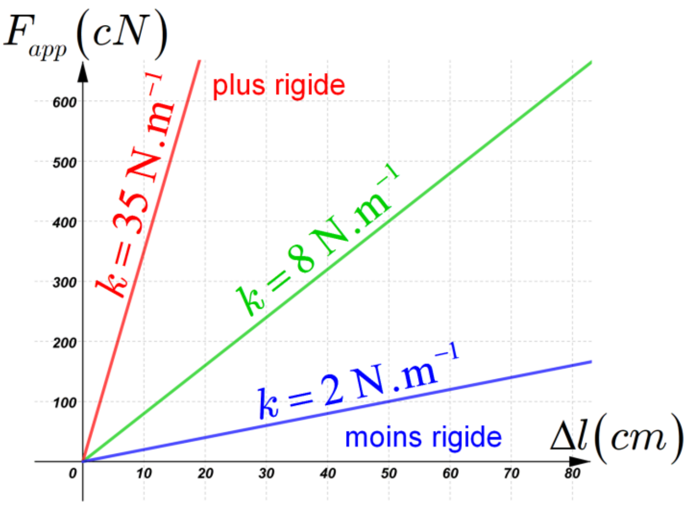
...

Quel que soit la masse ou le ressort, ... de la tige donc la relation $\vec{P} + \vec{N} = \vec{0}$ reste vraie aussi lorsque M est en mouvement.

3. Force de rappel élastique

Pour comprimer ou étirer un ressort, il faut lui appliquer une force qui compense la force imposée par le ressort pour revenir à l'équilibre, appelée **..............................** et noté $\vec{F}$.





Loi de Hooke pour un ressort hélicoïdal

Le graphique ne comporte que ...., la force appliquée F_{app} est une fonction .... de l'allongement Δl *i.e.* la force appliquée F_{app} est .... à l'allongement du ressort Δl. Chaque droite correspond à un ressort différent.

Le coefficient directeur de la droite noté k est **..................................** en **N.m-1**.

La loi de Hooke (1678) donne : $F_{app} = ...$ Pour un étirement selon un axe Ox, $\vec{F_{app}} = ...$

D'après la 1ère loi de Newton, à l'équilibre, $\vec{F}+\overrightarrow{F_{app}}=\vec{0}$ ou bien d'après la 3ème loi de Newton, la force appliquée étant l'action et la force de rappel la réaction : $\vec{F}=-\overrightarrow{F_{app}}$ d'où :

$\boxed{\vec{F} = \qquad\qquad\qquad\qquad}$ (axe Ox dans le sens de l'étirement)

Avec Δl l'allongement positif ou négatif du ressort en m.

Salviati : Pour un axe Oz dans le sens de la **compression** du ressort, $\vec{F}=+k\left(l-l_0\right)\overrightarrow{e_z}$.

B . Application des lois physiques

Par la suite, on notera x l'allongement du ressort *i.e.* $x(t)=\Delta l(t)=l(t)-l_0$

On applique la 2ème loi de Newton :

$\ldots$ avec $\vec{p}=\vec{p}(M)=m\vec{v}(M)$ et $\vec{a}=\vec{a}(M)=\dfrac{d\vec{v}(M)}{dt}$

Les forces se compensent sur l'axe Oy. En tenant compte des hypothèses de simplification, la masse n'est plus soumise qu'à …………………… : $m\vec{a}=\ldots$ et le mouvement est selon Ox.

Rigoureusement, $\vec{a}=a_x\overrightarrow{e_x}$ avec $a_x=$ car $l=l_0+x$ et $l_0=cste$

En projection sur l'axe Ox, $ma_x=$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\qquad\qquad}$

Sous forme canonique, $=$

Analogies mathématiques pour la variable temporelle :

problème	inconnue	pulsation	équation
circuit LC libre	$q(t)$		
système masse-ressort	$x(t)$		

Salviati : L'équation différentielle d'un oscillateur harmonique n'est pas exclusive au mouvement d'une masse liée à un ressort. Elle se retrouve dans de nombreux domaines de la physique y compris en mécanique quantique *i.e.* on utilise la même mathématique pour résoudre un problème, seule la grandeur physique, l'inconnue, change.

La **pulsation propre** et **la période propre** de l'oscillateur s'écrivent :

$\boxed{\qquad\qquad}$ et $\boxed{\qquad\qquad}$

C . Déterminer la solution

La solution dite **homogène** de l'équation différentielle s'écrit :

$$\boxed{x(t) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

On utilise aussi $x(t) = X\cos(\omega_0 t + \varphi)$

La vitesse du point M vaut donc : $v_x(t) =$

Exemple d'énoncé : On étire le ressort jusqu'à déplacer la masse à une distance $l_0 + X$ du point d'attache du ressort à $t = 0$ avec $X > 0$. On le lâche sans vitesse initiale.

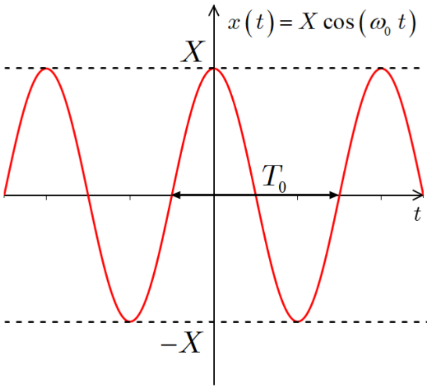
D'après l'énoncé, $l(t=0) =$ et $v_x(t=0) =$

D'après les expressions, $x(t=0) = \ldots$ et $v_x(t=0) = \ldots\ldots$

Par identification, $\begin{cases} \ldots = \ldots \\ \ldots\ldots = \ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots = \ldots \\ \ldots = \ldots \end{cases}$ car $\omega_0 \neq 0$

Donc $x(t) =$ et $\dot{x}(t) =$

La trajectoire du point M est une droite, le mouvement est ……………… et ………………, d'avant en arrière.



D . Etude des énergies

Astuce : On multiplie l'équation différentielle $\dfrac{d^2x(t)}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) = 0$ par $\dot{x}(t)$:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t)\frac{dx(t)}{dt} = 0$$

Puis on intègre l'équation par rapport au temps puisque la primitive de uu' est $\frac{1}{2}u^2$:

$$\frac{1}{2}\dot{x}^2 + \frac{1}{2}\omega_0^2 x^2 = cste$$

En multipliant par m : $= cste'$, c'est l'**intégrale 1ère du mouvement**.

On reconnaît l'énergie ……………… : $\dfrac{1}{2}m\dot{x}^2 =$

L'énergie ……………… ……………… s'écrit : $\boxed{\qquad\qquad}$

Salviati : Retenir juste $E_P = \frac{1}{2}kx^2$ pour un oscillateur harmonique peut être piégeux car ici, $x = l - l_0$ mais dans certains exercices, $x = l - l_{\text{éq}}$ ou $x = l_2 - l_1$ et dans ce cas, $E_P \neq \frac{1}{2}kx^2$.

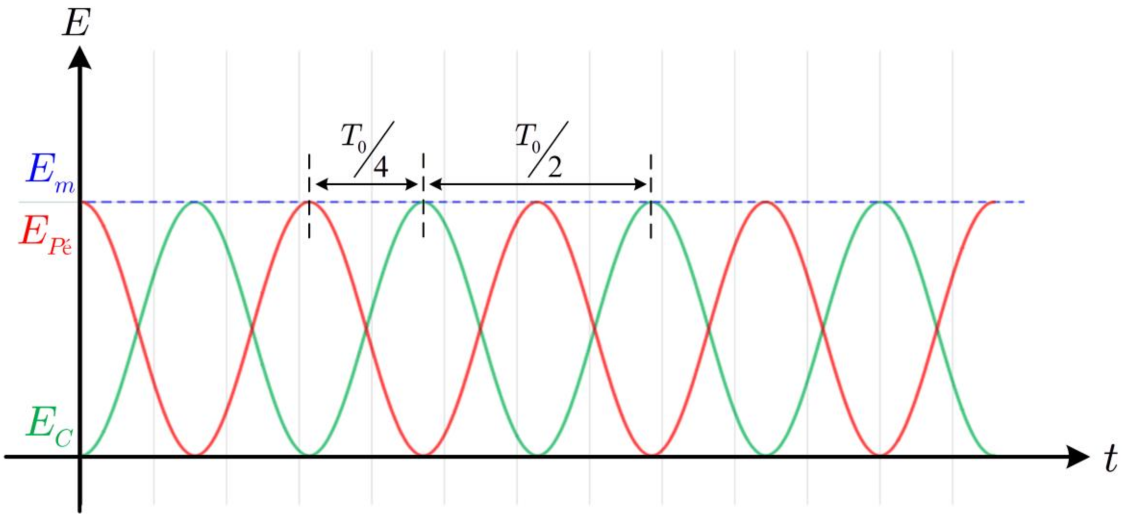
La constante n'est autre que l'énergie ……………….., on a alors $\ldots\ldots + \ldots\ldots = cste = \ldots\ldots$

On le vérifie en utilisant les expressions trouvées pour $x(t=0) = X$ et $v(t=0) = 0$:

$$x(t) = X\cos(\omega_0 t) \text{ et } \dot{x}(t) = -X\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

$E_m \overset{\text{déf}}{=}$

$=$, indépendant du temps

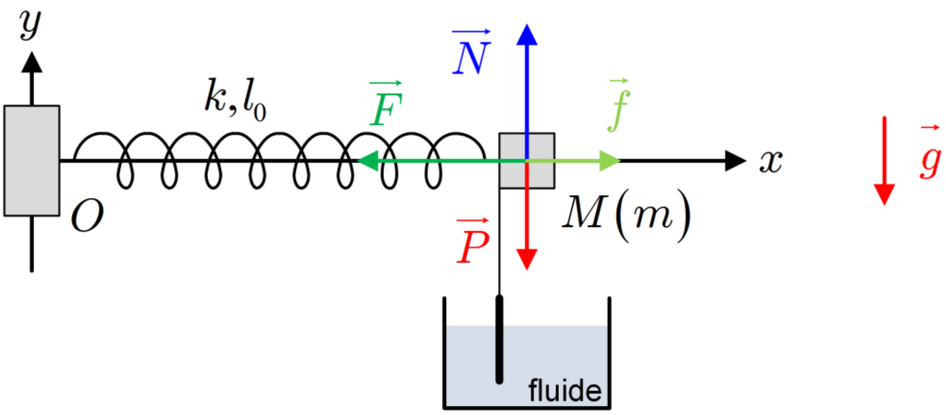


Toutes les demi-périodes, chacune leur tour, les énergies atteignent leurs maximums. L'énergie ………………… se conserve par un échange entre les énergies ………………… et ………………, elle se conserve aussi grâce à l'hyp.1 page 11 où on a négligé les frottements. La force de rappel élastique est une force ………………………

https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/oscillateur_horizontal.php

E . Analogies électromécaniques

On reprend le modèle masse-ressort précédent mais cette fois, on ne va pas plus négliger les frottements …………… avec l'hypothèse 1. On garde les autres hypothèses.



Les différentes étapes de résolution du problème sont les mêmes à la différence près qu'au bilan des forces, on garde une force $\vec{f} = f_x \vec{e_x}$ de frottement .... telle que :

$\vec{f} =$ avec $f_x =$ et $\alpha > 0$

En appliquant la 2ème loi de Newton, il vient $m\vec{a} = \ldots + \ldots \quad \overset{\vec{e_x}}{\Rightarrow} \quad ma_x = \ldots + \ldots$ d'où :

$\Leftrightarrow$ $\boxed{}$ avec α en ....

Cette équation est en tout point similaire à celle du régime .... du circuit .... :

Analogies électromécaniques :

problème	inconnue	équation
circuit	$q(t)$	
système masse-ressort avec frottement	$x(t)$	

On peut d'ailleurs la mettre sous la forme canonique telle que :

$\boxed{}$ ou $\boxed{}$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$, $\lambda = \frac{\alpha}{2m\omega_0}$, $Q = \frac{1}{2\lambda} = \frac{m\omega_0}{\alpha}$

Analogies électromécaniques entre les grandeurs

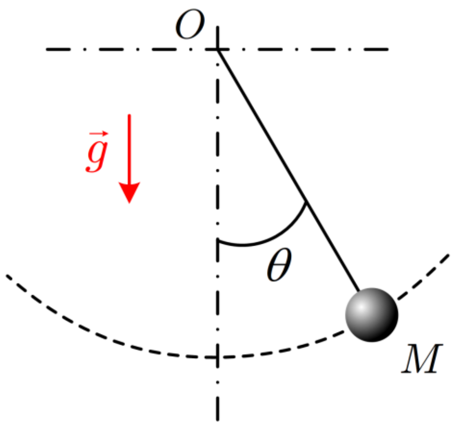
mécanique	électricité
position : $x(t)$	charge : $q(t)$
vitesse : $\dot{x}(t) = v_x(t)$	
	résistance : R
masse : m	
	capacité : C
force de frottement : αv_x	
produit masse accélération : ma_x	
force de rappel : kx	
énergie cinétique : $E_C = \frac{1}{2} m v_x^2$	
énergie potentielle élastique : $E_{Pe} = \frac{1}{2} k x^2$	

Conditions initiales : $x(t=0)=X$, $\dot{x}(t=0)=0$

L'équation étant la même, on aura les trois **mêmes régimes transitoires** moyennant les conditions initiales. Le frottement fluide, tout comme la résistance, **dissipe** l'énergie mécanique et freine les oscillations de la masse au bout du ressort jusqu'à son arrêt total.

Sans frottement, $\alpha=0$, λ……, Q…… , on retrouve le régime **………………** non amorti.

III . Le pendule simple (1ère partie)



Soit un point matériel M de masse m attaché par l'intermédiaire d'un fil sans masse, inextensible de longueur L supposé tendu, attaché à un point O dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Le point matériel est lâché sans vitesse initiale depuis un angle θ_0.

Objectif : Déterminer l'évolution de l'angle $\theta(t)$.

Compte-tenu des symétries du problème, on utilisera les coordonnées ………………………

A . Description du système

La définition de l'angle θ entre l'axe vertical et le fil impose que cet axe soit Ox et que l'axe horizontal soit Oy de façon à faire coïncider l'angle θ du problème avec l'angle θ des coordonnées …………………… L'axe Oz est donc orthogonal au plan xOy *i.e.* à la feuille.

Le mouvement est **circulaire** donc : $r=$

La vitesse peut s'écrire $\vec{v}(M)=$ et l'accélération s'écrit :

$\vec{a}(M)=$ (Chapitre I page 13)

- *Système :* solide assimilé au point M.
- *Référentiel :* …………………, …………………
- *Repère :* ……………… $\left(O,\vec{e_r},\vec{e_\theta}\right)$
- *Bilan des forces :*
  - ✓ *Poids :*
  - ✓ *Poussée d'Archimède :* dans l'air, négligeable
  - ✓ *Tension du fil :* avec $T=\left\|\vec{T}\right\|>0$
  - ✓ *Force de frottement fluide :*

B . Application des lois physiques

La 2ème loi de Newton s'écrit : $\dfrac{d\vec{p}}{dt}=\sum\overrightarrow{F_{ext}}$ $\Leftrightarrow$

Aucune force n'est selon Oz donc

On projette dans la base ……………… : $\begin{cases}\text{selon } \vec{e_r}: \\ \text{selon } \vec{e_\theta}:\end{cases}$

On s'intéresse à la 2ème équation en divisant par mL : $\boxed{}$

Sans frottement, $\alpha=0$ l'équation va s'écrire : $\boxed{}$ (pendule simple)

Cette équation est du 2ème ordre à coefficients constants sans second membre mais elle n'est pas **linéaire** à cause du ………… On ne peut pas la résoudre analytiquement.

C . Approximation linéaire des petits angles

On sait que $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=\ldots$ ce qui signifie que si $|x|<<1$ rad alors $\sin x\approx$

On sait aussi que $\lim\limits_{x\to0}\cos x=\ldots$ ce qui signifie que si $|x|<<1$ rad alors $\cos x\approx\ldots$ (ordre 0)

Dans le problème du pendule simple, si $\theta<<1$ rad alors $\sin\theta\approx\ldots$ d'où :

$$\boxed{}$$

On peut réécrire cette équation sous forme canonique en posant $\omega_0^2 =$, $2\lambda\omega_0 =$ d'où :

$$\boxed{\ddot{\theta}(t)+2\lambda\omega_0\dot{\theta}(t)+\omega_0^2\theta(t)=0}$$

On retrouve l'équation d'**un .... ** par frottement fluide.

Pour le régime pseudo-périodique où l'amortissement est le plus faible :

$\lambda =$ $\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow$, la solution s'écrit :

$\boxed{\theta(t)=}$ avec $\omega=\omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$

où A, B dépendent des conditions initiales et ω **la pseudo-pulsation propre**

	sans approximation	**avec approximation**
avec frottement		
sans frottement		

Analogies électromécaniques :

problème	**inconnue**	**pulsation au carré**
circuit LC libre	$q(t)$	
masse-ressort	$x(t)$	
pendule simple	$\theta(t)$	

Sans frottement et avec approximation, le pendule simple se ramène à un oscillateur harmonique non amorti de période T_0, il s'agit donc d'un mouvement circulaire oscillant.

$\boxed{\quad}$ et $\boxed{\quad}$

La solution s'écrit : $\theta(t)=$

Sa dérivée ou **vitesse angulaire** s'écrit : $\dot{\theta}(t)=$

D'après les conditions initiales, $\theta(0)=\ldots=\ldots$ et sans vitesse : $\dot{\theta}(0)=\dfrac{\ldots(0)}{L}=\ldots\ldots=\ldots.$

Or $\omega_0\neq 0$ donc $B=0$ et $\boxed{\theta(t)=}$ et $\boxed{\dot{\theta}(t)=}$

Equation différentielle linéaire en sciences physiques

D . Etude de la tension du fil

Astuce : On multiplie l'équation $\ddot{\theta}+\frac{g}{L}\sin\theta=0$ par $\dot{\theta}$:

On intègre toute l'équation : et en multipliant par mL^2 :

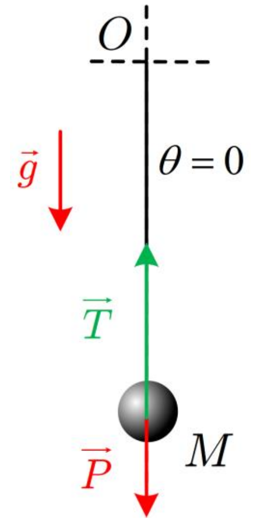
, c'est l'intégrale 1ère du mouvement

On reconnaît l'énergie ……………… : puisque

Avec les conditions initiales choisies, on détermine la constante :

$cste' =$ d'où :

…



On réinjecte dans l'équation selon $\vec{e_r}$ pour trouver l'expression de T :

…

…

A la verticale, lorsque $\theta=0$, $\boxed{T = \quad}$

A l'équilibre, sans vitesse initiale, sans angle initiale $\theta_0=0$, $T=$

En effet, le principe d'inertie s'applique, le pendule est …………………… donc les forces qui s'exercent sur lui ………………………… :

Hors équilibre, même si le pendule est en mouvement, on aurait pu penser que ces 2 forces se compenseraient encore comme $\vec{P}$ et $\vec{N}$ pour l' …………………… ……………………

Mais ce n'est pas le cas car lorsque $\theta_0 \neq 0$, $T \neq P$.

…

La tension du fil est plus ………….. lorsqu'il y a mouvement car elle doit compenser ………… mais aussi l'effet ……………, elle joue le rôle de force …………… hors équilibre.

Table des matières