Chapitre I
Cinématique du point

La mécanique est la partie de la physique ayant pour objet l'étude des mouvements des objets, leurs relations et les forces qui les produisent. On distingue 2 parties essentielles : la ………………………, qui est la description des mouvements dans l'espace-temps et la ……………………, qui est l'étude des causes du mouvement, que l'on décrit par des forces.

Relire la fiche thématique – Les différentielles

Collège (cycle 4)

- Caractériser le mouvement d'un objet.
- Utiliser la relation liant vitesse, distance et durée dans le cas d'un mouvement uniforme.
- Vitesse : direction, sens et valeur. Mouvements rectilignes et circulaires.
- Mouvements uniformes et mouvements dont la vitesse varie au cours du temps

Seconde

- Identifier les échelles temporelles/spatiales pertinentes de description d'un mouvement.
- Approcher le vecteur vitesse d'un point à l'aide du vecteur déplacement $\overrightarrow{MM'}$.
- Vecteur vitesse d'un point. Mouvement rectiligne.

Première (spé)

- Vecteur variation de vitesse.

Terminale (spé)

- Vecteurs position, vitesse et accélération d'un point.
- Établir les **coordonnées cartésiennes** des vecteurs vitesse et accélération.
- Vecteurs vitesse et accélération dans le **repère de Frenet** pour un mvt circulaire.
- Mouvement rectiligne **uniformément accéléré**.
- Mouvement circulaire uniforme.
- **Centre de masse** d'un système. Justifier qualitativement sa position.

Grandeurs physiques :

Grandeur physique	Symbole	Unité (Unité du S.I.)	Dimension	Apparition
	θ, φ, etc …	rad, °	1	Cycle 3 ($6^{\text{ème}}$)
vitesse angulaire	ω, Ω	rad.s^{-1}		Optique ondulatoire
	$\overrightarrow{OM}, \vec{r}$	m (norme)		2^{nde}
	$\vec{v}$	m.s^{-1} (norme)		Cycle 4 ($3^{\text{ème}}$)
	$\vec{a}$	m.s^{-2} (norme)		Terminale

S.I. : T : temps, L : longueur, M : masse, I : intensité, Θ : température, N : quantité de matière

MATHS

- Vecteurs, coordonnées, projections, dérivées, différentielles.

I. Un point sur les vecteurs

Un vecteur contient toujours **3 informations à la fois** (……………, ……, ……… OU ses ………………………) alors qu'un nombre ne contient qu'**1 information**, sa propre valeur.

Lorsqu'un vecteur $\vec{v}$ ou $\vec{m}$ apparaît dans un énoncé, il faut savoir ce que représente v ou m car, parfois, il s'agit de la norme $\|\vec{v}\| = v$, parfois, il s'agit de la coordonnée $\vec{m} = m\vec{e_z}$.

A 3D, $\vec{v} = v_x\vec{e_x} + v_y\vec{e_y} + v_z\vec{e_z} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{v}\| = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}$

A 1D, $\vec{v} = v_x\vec{e_x} \quad \Rightarrow \quad \|\vec{v}\| =$ donc $v = \ldots\ldots$ selon le signe

Salviati : **@Simplicius** Ne pas confondre vecteur, norme et coordonnée, surtout à 1D.
Ecrire v_x, P_y ou N_z avec une flèche est une faute à éviter car ce sont des coordonnées.

Les vecteurs **unidirectionnels** *i.e.* qui ne possèdent qu'une seule coordonnée comme $\vec{m} = m\,\vec{e_z}$ ont leur norme égale à leur coordonnée **si et seulement si** cette coordonnée est **……………** sinon leur norme est égale à **…………………** de cette coordonnée :

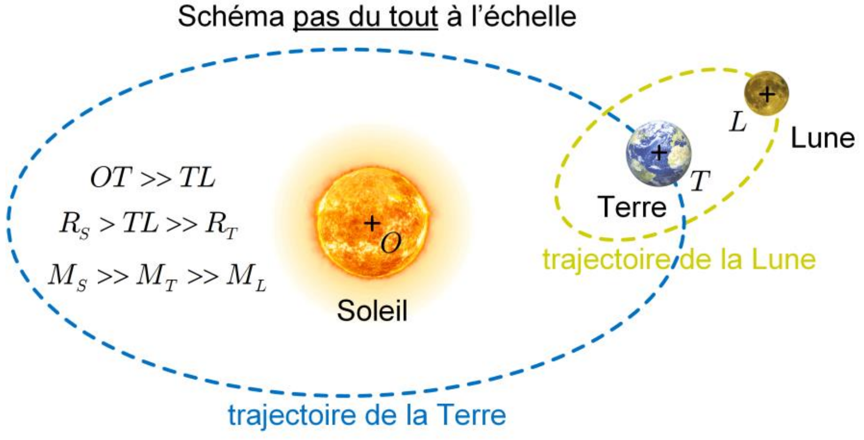
et

II. Système ponctuel

Objectif : décrire le mouvement dans notre espace à trois dimensions et au cours du temps d'un système en l'assimilant à un point M.

A. Système barycentrique

Soit le système {Terre-Lune} décrit dans le référentiel **héliocentrique** ; on assimile les astres à leurs centres : le Soleil au point O, la Terre au point T, la Lune au point L.



Le centre de masse ou centre d'inertie du système {Terre-Lune} noté G est défini par :

où m_T, m_L les masses respectives de la Terre et de la Lune.

Mathématiquement, G est le **barycentre** des points T et L pondérés de leur masse.

…

De plus, $m_L = 7,35.10^{22}$ kg et $m_T = 5,97.10^{24}$ kg donc $\left\|\overrightarrow{TG}\right\| \approx$

Le centre de masse G est ……………………………… car le rayon terrestre vaut 6370 km.

Pour faire apparaître les **vecteurs positions**, on utilise la relation de Chasles en introduisant le point O : d'où :

où $m_{tot} = m_T + m_L$ la **masse totale** du système {Terre-Lune}

Cas général d'un système de N corps de masses m_i assimilées à des points M_i :

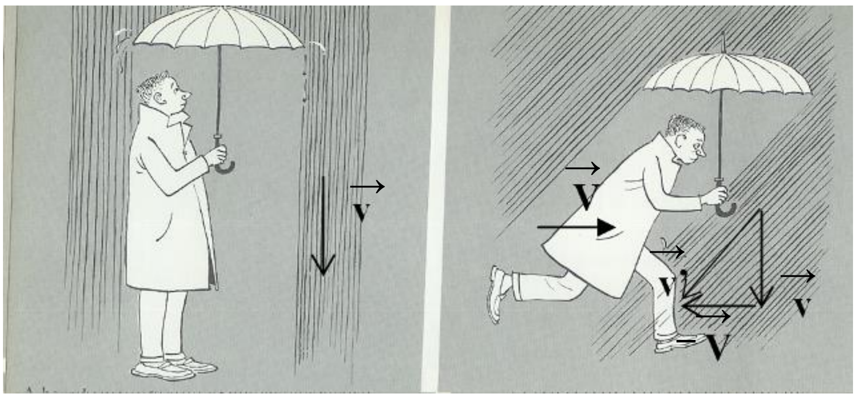
et où $m_{tot} = \sum_i^N m_i$

B . Le référentiel

Le mouvement d'un système est relatif à ………………………………………

C'est pour cette raison qu'il faut choisir un **……………………… d'observation** *i.e.* tout objet considéré comme **………… pour l'observateur** associé à un **repère à 3 axes** (pour 3 dimensions de l'espace, voir page 8) et une **horloge** pour mesurer les durées.

1 . L'observateur (la référence)



Choisir un système, un référentiel pour discuter de la vitesse de la pluie.

Sur la 1ère image, le système {goutte de pluie assimilée à un point} va à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}$ dans le référentiel de l'observateur. Il s'agit du référentiel **……………..** car l'observateur est immobile par rapport à la surface de la Terre, on pourra choisir ……………………………… ou……………………………………… comme **point** de référence O.

Sur la 2ème image, le système {goutte de pluie assimilée à un point} va à une vitesse $\vec{\mathbf{v}}'$ dans le référentiel de l'observateur. Ce n'est plus un référentiel ……….. car l'observateur se déplace à une vitesse $\vec{\mathbf{V}}$ par rapport à la surface de la Terre donc par rapport à O, on pourra choisir …………………………. comme référence O' avec …

En mécanique Newtonienne, $\vec{\mathbf{v}}' = \ldots - \ldots$ et comme **ici**, $\vec{\mathbf{V}} \perp \vec{\mathbf{v}}$ alors $\left\|\vec{\mathbf{v}}'\right\| = \mathbf{v}' =$

On associe souvent le référentiel à un point **origine ou centre du repère** noté O.
Lorsqu'on change d'observateur, on change de point origine : nouvelle origine notée O'.

2 . L'horloge (le temps)

L'**horloge** ou chronomètre associée au référentiel mesure la durée d'un évènement entre 2 déplacements d'une aiguille ou entre 2 valeurs numériques. L'instant initial noté t_i et l'instant final noté t_f sont telles que la durée d'un évènement Δt s'écrit : $\Delta t = t_f - t_i$

Record du monde du 100m à Berlin le 16 août 2009

Exemple : Dans le référentiel terrestre (R) du stade olympique de Berlin, la course de 100m de Usain Bolt démarre à $t_i = 0,00$ s (pris comme origine des temps) et finit à $t_f = 9,58$ s d'après la mesure d'un chronomètre électronique lié à (R).

Vu d'un avion à 900 km/h au-dessus du stade : référentiel (R') ou immobile par rapport à (R) dans un canapé en France, $\quad = \quad$. En mécanique Newtonienne, la durée d'un évènement est ……….. quel que soit le référentiel (l'observateur), le temps a un caractère **……………**, il en est de même pour l'espace, la piste mesure : $(\Delta\ell)_R = (\Delta\ell)_{R'} = 100$ m.

Quelques exemples de référentiels :

référentiel	**référence**	**temps d'étude** t
	objet immobile par rapport à la surface de la Terre centre de la Terre centre du Soleil	

Selon le système d'étude et sa durée d'étude, il faut choisir un référentiel adapté.

On définit une **durée infinitésimale** dt entre un instant t et un instant $t+dt$.
On parle aussi de **…………………………………** ou **……………………………**

C . Les vecteurs principaux

La position d'un point M par rapport au point d'origine O doit être décrit par une **direction** : ……………………, un **sens** : …………………, une **longueur / distance / norme / valeur** notée OM.
Il est possible d'obtenir ces 3 informations avec un seul outil mathématique : le ……………………… $\vec{r}=\overrightarrow{OM}$.

Le point M se déplace au cours du temps donc $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM}(t)$. Pendant dt, le point M s'est déplacé du vecteur infinitésimal $d\overrightarrow{OM}$ tel que …

Le **vecteur-vitesse** est la dérivée par rapport au temps du vecteur-position :

$$\boxed{\vec{v}(M)\overset{\text{déf}}{=}\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \qquad \Leftrightarrow \qquad}$$

$\left(\text{dérivée} = \text{rapport} = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\right)$

Le vecteur-vitesse peut être vu comme le rapport entre le **déplacement infinitésimal** $d\overrightarrow{OM}$ (ou élément d'espace) et la durée infinitésimale dt ou élément de temps.

Le vecteur-vitesse est toujours ……………………………………

Le **vecteur- accélération** est la dérivée par rapport au temps du vecteur-vitesse :

$$\boxed{\vec{a}(M)\overset{\text{déf}}{=} \qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad}$$

La vitesse et l'accélération sont **relatifs** au référentiel choisi, $\vec{v}_R \neq \vec{v}_{R'}$ et $\vec{a}_R \neq \vec{a}_{R'}$.

III . Le repère (l'espace)

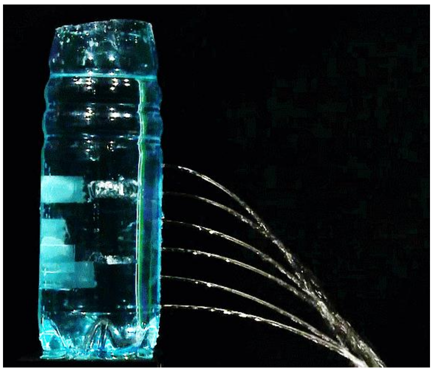
Pour toute cette partie, on choisira un référentiel **terrestre** (écorce terrestre fixe).
Une fois le système et le référentiel choisis, on projette les vecteurs dans une base orthogonale ou **repère** (3 vecteurs unitaires orthogonaux).

A . Coordonnées cartésiennes

Il est nécessaire de choisir un repère de l'espace pour décrire les coordonnées liées à la position initiale …………… et à la vitesse initiale …………… d'un système.

1. Vecteur-accélération constante

Décrire les conditions initiales des mouvements suivants :



➢ La 1ère image est une ...., la superposition des images prises à intervalles de temps réguliers. On choisit un repère Oxy ayant pour origine O coïncidant avec le départ du système {skieur}.

Conditions initiales :

$$\overrightarrow{OM}(t=0)=$$

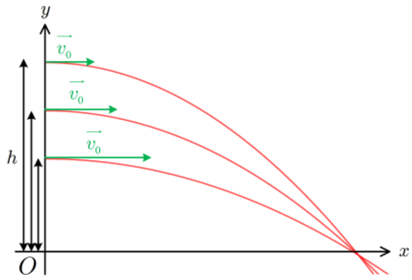
$$\cos\alpha=\frac{\cdots\cdots\cdots}{v_0},\ \sin\alpha=\frac{\cdots\cdots\cdots}{v_0}$$

Donc $\vec{v}(t=0)=$ avec $v_0>0$ et $\boxed{0<\alpha<\pi/2}$

Salviati : Attention aux notations : $\vec{v}(t=0)$ ou $\vec{v}(0)$ est la vitesse prise à $t=0$ mais $\vec{v_0}$ est une notation, on aurait pu écrire $\vec{v}(t=0)=\vec{v_i}$, vitesse initiale plutôt que $\vec{v_0}$.

➢ La 2ème image montre le trajet d'un système {goutte d'eau} à travers une bouteille percée. On choisit un repère Oxy ayant pour centre O la base de la bouteille.

Conditions initiales pour la 2ème image :



$\overrightarrow{OM}(t=0)=$ avec $h>0$

$\vec{v}(t=0)=\vec{v_0}=\left|\begin{array}{l}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{array}\right.$ avec $v_0>0$ et $\boxed{\alpha=\ldots}$

Ces 2 systèmes sont soumis uniquement à l'intensité de la pesanteur $\vec{g}$ dirigé selon Oy vers le **bas**. Quel que soit l'origine des repères choisis précédemment dans les exemples :

$\boxed{\vec{g}=\left|\begin{array}{l}\ldots \\ \ldots\end{array}\right.}$ Ce vecteur est **constant**, il s'agit du vecteur-accélération $\vec{a}=\vec{g}$ (voir Chapitre II).

Objectif : Etablir l'équation cartésienne d'un système à vecteur-accélération constant.

➢ *Cas des 2 exemples : trajectoire parabolique avec* $v_0 \neq 0$, $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$ *et* $\overrightarrow{OM_0} = x_0\overrightarrow{e_x} + y_0\overrightarrow{e_y}$

1) On intègre par rapport au temps pour obtenir la vitesse :

$$\vec{a} = \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}(t) = \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \end{vmatrix}$$

où A, B sont des constantes à déterminer grâce aux conditions initiales.

D'après les conditions initiales, $\vec{v}(t=0) = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \end{vmatrix}$ et d'après l'expression, $\vec{v}(t=0) = \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \end{vmatrix}$

Donc par identification, $A = \dots\dots\dots$, $B = \dots\dots\dots$ et donc $\boxed{\vec{v}(t) = \begin{vmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}}$

Selon Ox, le mouvement est **……………….** car v_x est constante par rapport au temps.

2) On intègre par rapport au temps pour obtenir la position :

$$\vec{v}(t) = \begin{vmatrix} \dots\dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{vmatrix} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{OM}(t) = \begin{vmatrix} x(t) = \dots\dots\dots\dots \\ y(t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}$$

où A', B' sont des constantes à déterminer grâce aux conditions initiales.

D'après les conditions initiales, $\overrightarrow{OM}(t=0) = \begin{vmatrix} x_0 \\ y_0 \end{vmatrix}$ et d'après l'expression $\overrightarrow{OM}(t=0) = \begin{vmatrix} A' \\ B' \end{vmatrix}$

D'où $A' = x_0, B' = y_0$ et $\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \begin{vmatrix} x(t) = \dots\dots\dots\dots \\ y(t) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{vmatrix}}$ (équations **horaires**)

3) On exprime t en fonction de x puis y en fonction de x :

… avec $v_0 \neq 0$ et $\alpha \neq \pm\frac{\pi}{2}$

D'où $\boxed{y = y(x) = \quad\quad\quad\quad}$ (équation **cartésienne**)

➢ Dans le cas du skieur, $x_0 = y_0 = 0$, $y =$

➢ Dans le cas de la bouteille percée, $x_0 = 0, \alpha = 0, y_0 = h$, $y =$

Ce sont bien des trajectoires **……………………….**

Dans les exemples précédents, $z(t) = 0$ quelles que soient les conditions initiales.

➢ *Cas particuliers : trajectoire rectiligne avec* $v_0 = 0$ *ou* $\alpha = \pm\frac{\pi}{2}$ *et* $\overrightarrow{OM_0} = x_0\overrightarrow{e_x} + y_0\overrightarrow{e_y}$

1) Chute verticale sans vitesse initiale :

$x_0 = 0, y_0 = h, v_0 = 0$, ce qui donne $\vec{v}(t) = \left| \begin{array}{l} \dots \\ \dots\dots \end{array} \right.$ puis $\overrightarrow{OM}(t) = \left| \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$

Le mouvement est rectiligne .... car $\|\vec{v}\| \propto t$

2) Lancer vertical avec vitesse initiale vers le haut :

$x_0 = 0, \alpha = \frac{\pi}{2}, v_0 \neq 0$, ce qui donne $\vec{v}(t) = \left| \begin{array}{l} \dots \\ \dots\dots\dots\dots \end{array} \right.$ puis $\overrightarrow{OM}(t < t_{\max}) = \left| \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} \right.$

Le mouvement est rectiligne .... jusqu'à ce que la vitesse s'annule.

En $t = t_{\max}$, $\vec{v}(t = t_{\max}) = \vec{0} \quad \Rightarrow$

La vitesse s'annule à une hauteur $y_{\max} = y(t = t_{\max}) =$

Le mouvement change de sens et on retrouve une chute verticale :

$$\vec{a}(t > t_{\max}) = \left| \begin{array}{l} 0 \\ -g \end{array} \right. \quad \Rightarrow$$

2 . La base cartésienne

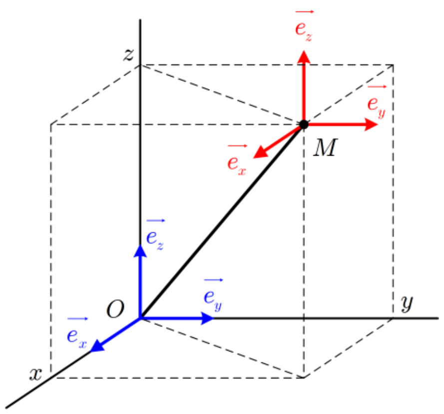
La base cartésienne est définie par 3 vecteurs $\left(\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}\right)$ notés aussi $\left(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}\right), \left(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}\right)$ orthogonaux deux à deux.

Ces vecteurs sont **unitaires** : …

De plus, ils sont .... : $\overrightarrow{e_x} = \overrightarrow{cste}$, $\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{cste}$, $\overrightarrow{e_z} = \overrightarrow{cste}$

Ces vecteurs ne dépendent donc pas du temps :

… (dérivées nulles) (0)

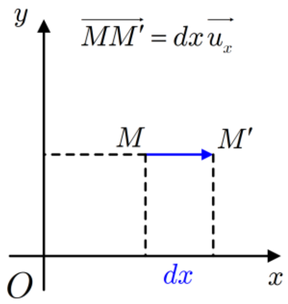


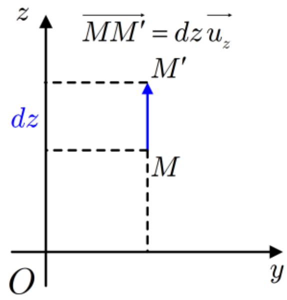
Dans la base cartésienne :

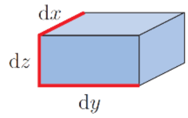
$$\boxed{\dots\dots = \dots = x\,\overrightarrow{e_x} + y\,\overrightarrow{e_y} + z\,\overrightarrow{e_z}}$$ ⚠ *norme :* $\|\overrightarrow{OM}\| = r =$

On peut aussi écrire $\overrightarrow{OM} =$ ou $M(x, y, z)$ où x, y, z sont les **coordonnées** de M.

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/







Un **déplacement infinitésimal** selon $\overrightarrow{e_x}$ aura une valeur dx en mètres.

De même, un déplacement infinitésimal selon $\overrightarrow{e_y}$ ou $\overrightarrow{e_z}$ aura une valeur dy ou dz.

(cas général dans la base cartésienne)

Pour 2 fonctions scalaires u et v du temps, $(uv)' = u'v + v'u$. Pour une fonction scalaire u et une fonction vecteur $\vec{v}$ du temps, on a de la même façon, $(u\vec{v})' =$

➢ ***Coordonnées de la vitesse :***

$\vec{v}(M) =$ d'après (0).

Avec la notation du point correspondant aux dérivées :

$\vec{v}(M) =$ ⚠ *norme :* $\|\vec{v}(M)\| = v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

On peut aussi écrire $\vec{v}(M) = \quad = \quad$ où v_x, v_y, v_z sont les **coordonnées** de $\vec{v}(M)$.

➢ ***Coordonnées de l'accélération :***

$\vec{a}(M) =$ d'après (0).

Avec la notation du point correspondant aux dérivées :

$\vec{a}(M) =$ ⚠ *norme :* $\|\vec{a}(M)\| = a =$

On peut aussi écrire $\vec{a}(M) = \quad = \quad$ où a_x, a_y, a_z sont les **coordonnées** de $\vec{a}(M)$.

Dans les exemples précédents, $\vec{a}(M) =$

B. Coordonnées cylindriques (ou polaires)

1. Notion d'angle

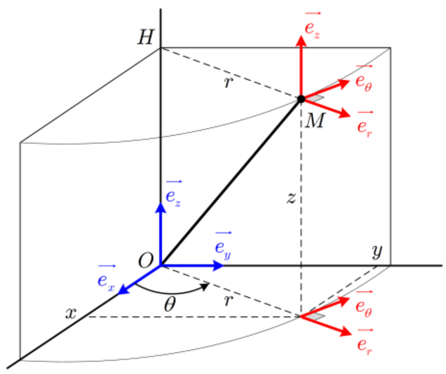
Un **angle** est le rapport entre la longueur ℓ de l'arc de cercle intercepté par cet angle et le rayon de courbure R :

$\boxed{\theta = \frac{\dots}{\dots}}$ avec θ en rad, $\boxed{\dots \ = \frac{\dots}{\dots} \Leftrightarrow \dots \ = \dots\dots}$ (utile)

Lorsque $\theta = 2\pi$, un angle **...........**, $\ell = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$, formule du périmètre.

En – 3000, les Sumériens inventent l'écriture puis en – 2400, ils fabriquent un calendrier circulaire en pierre divisé en 12 mois de 30 jours soit les 360 degrés actuels :

$$1° = \frac{2\pi}{\dots\dots}\text{ rad} = \frac{\dots}{180}\text{ rad}$$



2. La base cylindrique ou polaire

La base cylindrique, ou bien **polaire** si $z = cste$, est définie par 3 vecteurs $\left(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z\right)$ orthogonaux deux à deux.

Ces vecteurs sont **unitaires** : ...

$\vec{e}_z$ est le même que celui de la base cartésienne. ... = où H projeté de M sur Oz.

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/

Dans la base cylindrique, quel que soit la valeur de l'angle θ allant de ... à ...... :

$\boxed{\overrightarrow{OM} = \qquad\qquad}$ ⚠ *norme :* $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = \sqrt{r^2 + z^2} \neq r$

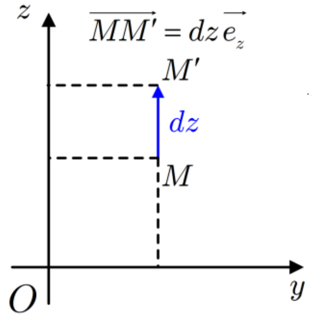
On peut aussi écrire $\overrightarrow{OM} =$ ou $M(\dots,\dots,\dots)$. M n'a **...........** de coordonnée selon $\vec{e}_\theta$.

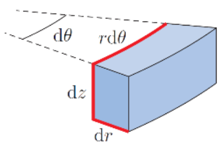
(pour un autre point P, sa coordonnée OP_θ selon $\vec{e}_\theta$ serait une longueur et non un angle).

➢ ***Changement de variables entre les bases :***

$$\begin{cases} x = \dots\dots\dots\dots \\ y = \dots\dots\dots\dots \\ z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \\ \dots\dots\dots = \frac{\dots}{\dots} \\ z \end{cases}$$

Un **déplacement infinitésimal** selon $\overrightarrow{e_r}$ vaut …… De même, selon $\overrightarrow{e_z}$, on aura dz.
La longueur de l'arc intercepté par $d\theta$ est égale MM', ce n'est pas une approximation.





Un déplacement infinitésimal **angulaire** $d\theta$ conduit à un déplacement …… selon $\overrightarrow{e_\theta}$.

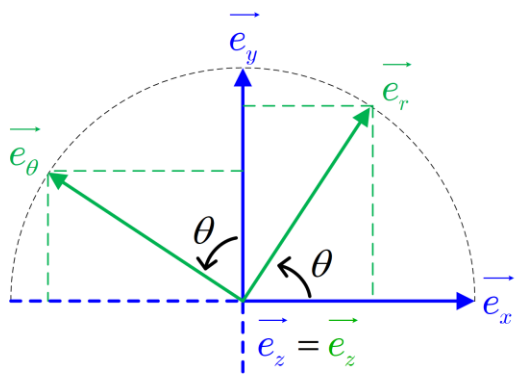
$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ (cas général)

Les vecteurs $\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}$ dépendent de la position de M donc du temps, non définis si $M \in Oz$.

On sait que la dérivée de $f(u(x))$ est $u' f'(u(x))$ donc la dérivée de $f(\theta(t))$ est ……………

On peut exprimer $\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}$ dans la base cartésienne :

Rotation autour de Oz



$$\begin{cases} \overrightarrow{e_r} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \overrightarrow{e_x} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \overrightarrow{e_y} \\ \overrightarrow{e_\theta} = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \overrightarrow{e_x} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \overrightarrow{e_y} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \ldots \\ \dfrac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = \ldots \end{cases}$$

$\boxed{\dfrac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \qquad}$ et $\boxed{\dfrac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt} = \qquad}$ (0')

➢ ***Coordonnées de la vitesse :***

$\vec{v}(M) =$ d'après (0) et (0').

Avec la notation du point correspondant aux dérivées :

$\boxed{\vec{v}(M) = \qquad\qquad\qquad}$ ⚠ *norme :* $\|\vec{v}(M)\| = v =$

On peut aussi écrire $\vec{v}(M) = \quad = \quad$ où v_r, v_θ, v_z sont les **coordonnées** de $\vec{v}(M)$.

➤ ***Coordonnées de l'accélération :***

$\vec{a}(M) = \dfrac{d\vec{v}(M)}{dt} =$ d'après (0) et (0').

Avec la notation du point correspondant aux dérivées :

$\boxed{\vec{a}(M) = \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ ⚠ *norme :* $\left\|\vec{a}(M)\right\| = a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2 + a_z^2}$

On peut aussi écrire $\vec{a}(M) = \begin{vmatrix} a_r \\ a_\theta = \\ a_z \end{vmatrix}$ où a_r, a_θ, a_z les **coordonnées** de $\vec{a}(M)$.

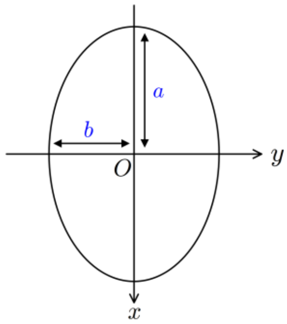
3 . Mouvement circulaire

On s'intéresse au mouvement de la Lune qui n'est soumise qu'à la pesanteur terrestre $\vec{g}$ et tombe depuis plus de 4 milliards d'années sans toucher le sol à cause de sa vitesse de rotation importante. Son mouvement n'est donc **ni rectiligne ni parabolique**.

Objectif : Décrire le mouvement sélénien à l'aide des coordonnées cylindriques.

Soit l'excentricité e, un paramètre liée à une orbite elliptique : $e = \sqrt{1 - \left(\dfrac{b}{a}\right)^2}$.

mouvement	**trajectoire**	**excentricité** e
	cercle	0
	orbite terrestre / Soleil	0,017
	orbite lunaire / Terre	0,055
	ellipse	$0 < e < 1$
	droite	1



Hyp. 1 : **Le mouvement sélénien est supposé ………………… ($e \approx 0$, $r \approx cste$).**
Hyp.2 : **On néglige les rotations internes en assimilant le système à un point M.**
Hyp. 3 : **On suppose les mouvements …………… (coordonnée selon Oz nulle).**

Pour une chute libre ou un tir balistique qui ne dure pas plus d'1h en général, le référentiel **terrestre** est suffisant pour leur étude (1h << 24h).

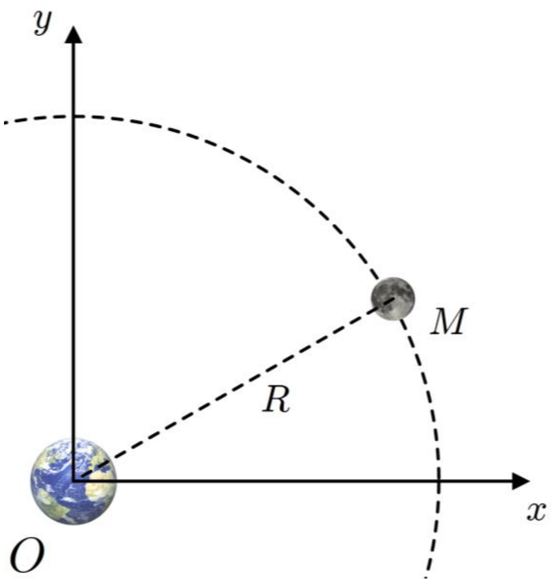
Pour la Lune dont la révolution autour de la Terre est d'environ $T = 27$ j, il faut choisir un référentiel avec un temps d'étude plus grand : le référentiel ………………… (27 j << 365 j).

Un mouvement est circulaire lorsque la trajectoire est un cercle : …………………

Dans la base cylindrique, $\overrightarrow{OM} =$ où R le rayon de l'orbite lunaire (constant).

Comme $r = R$, alors $\dot{r} = 0$ et $\ddot{r} = 0$ mais cela **ne veut pas dire** que a_r est nulle. D'où :

$\vec{v}(M) =$



La vitesse n'a pas de composante radiale, elle est donc **tangentielle** (tangente à la trajectoire). Dans le cas général, le mouvement est **non uniforme**. L'accélération s'écrit :

$\vec{a}(M) =$

La composante **……………** de l'accélération est **…………………** donc quel que soit a_θ le vecteur-accélération est dirigé dans la concavité de la trajectoire, vers ………………………

4 . Mouvement circulaire uniforme (MCU)

Le mouvement est **uniforme** lorsque **……………… ………………………………………**

$v = \|\vec{v}\| = cste$ mais le vecteur-vitesse n'est en général **pas constant** : $\vec{v} \neq \overrightarrow{cste}$.

Ici, avec une seule composante, $\|\vec{v}\| =$. Or d'après l'hyp. 1, $R = cste$, donc pour avoir un mouvement uniforme, il faut que . La dérivée de l'angle θ par rapport au temps est appelée **………………………………** notée ω et s'exprime en rad.s^{-1}.

Si $\dot{\theta} = cste = \omega > 0$ alors ……=………….. où φ est l'angle à l'origine ou phase.

On retrouve cet angle à l'origine à l'instant $t = \dfrac{2\pi}{\omega} = T$ car $\theta(T) =$

La **………………………………** ω vue chapitre II p.7 est bien la même grandeur physique.

Cette notion de périodicité de 2π est tout à fait appropriée pour un mouvement circulaire puisque la Lune retrouve la position qu'elle avait après une durée $\Delta t = T$ *i.e.* après avoir parcouru l'arc interceptant un angle $\theta = 2\pi$ *i.e.* après avoir fait le tour de son orbite.

Si $\dot{\theta} = cste$ alors $\ddot{\theta} = 0$ d'où ……..= . On remarque que $a_r < 0$

L'accélération est centripète pour un mouvement circulaire uniforme :

- **direction : …**
- **sens : …**
- **norme : …**

v_θ et a_θ sont des coordonnées dites **orthoradiales**. Une accélération **centrifuge** serait une accélération radiale mais dirigée vers l'extérieur de la concavité avec $a_r > 0$, $a_\theta = a_z = 0$.

➢ ***Expressions des normes de la vitesse et de l'accélération :***

La vitesse s'écrit $\boxed{\ldots = \ldots\ldots\ldots\ldots}$ selon le signe de ……………………… On a donc :

$\boxed{}$ (circulaire uniforme)

L'accélération s'écrit $\boxed{\ldots =}$ c'est-à-dire que :

$\boxed{}$ (circulaire uniforme, $a = -a_r > 0$, revoir page 2)

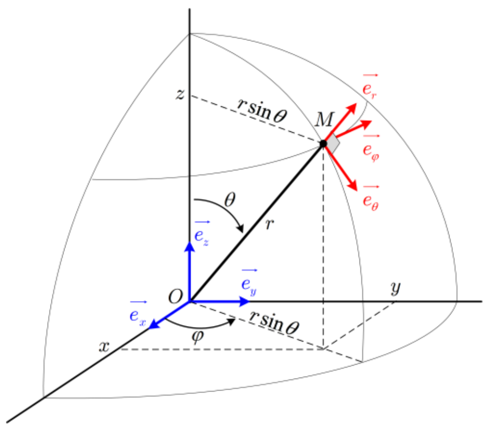
@Simplicius La norme de l'accélération **n'est pas** la dérivée de la norme de la vitesse. Pour un mouvement circulaire uniforme, $\vec{v} \neq \overrightarrow{cste}$ et $\vec{a} \neq \overrightarrow{cste}$ alors que $v = cste$ et $a = cste$.

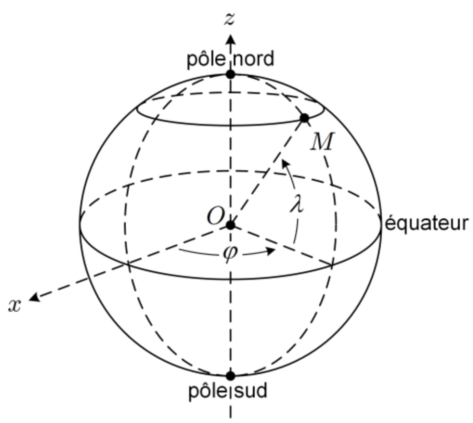
⚠ $\vec{a} \overset{\text{déf}}{=} \dfrac{d\vec{v}}{dt}$ mais $a \neq \dfrac{dv}{dt}$ en général, c'est exactement le cas pour le MCU. ⚠

C . Coordonnées sphériques

La base sphérique est définie par 3 vecteurs $\left(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}\right)$ orthogonaux deux à deux.

Et ces vecteurs sont **unitaires** : $\left\|\overrightarrow{e_r}\right\| = \left\|\overrightarrow{e_\theta}\right\| = \left\|\overrightarrow{e_\varphi}\right\| = 1$





http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Cinematique/

Dans la base sphérique, … = . Les vecteurs unitaires dépendent **tous** du temps.

L'angle φ n'est autre que l'angle θ des coordonnées cylindriques allant de … à ……
L'angle θ est la **colatitude**, angle **complémentaire** de la latitude λ allant de … à …
Dans la base sphérique, quel que soit l'angle azimutal θ et de l'angle orbital φ :

$\boxed{\overrightarrow{OM} = \vec{r} = r\,\overrightarrow{e_r}}$ (on retrouve comme en coordonnées cartésiennes : $\left\|\overrightarrow{OM}\right\| = r$)

On peut aussi écrire $\overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}$ ou $M(r,0,0)$. M n'a **jamais** de coordonnée selon $\overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_\varphi}$.

➢ ***Changement de variables entre les bases :*** $\begin{cases} x = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z = \ldots\ldots\ldots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r = \\ \tan\theta = \\ \tan\varphi = \end{cases}$

Salviati : Ne pas confondre la base cylindrique et la base sphérique, les définitions de r et de θ sont totalement différentes. La base sphérique sera peu utilisée en MPSI.

D . Le repère de Frenet (1852)

On cherche une base optimale pour l'étude des mouvements plans, c'est la base de Frénet.

1 . Un nouveau point sur les vecteurs

➢ Dans la base cartésienne, $\vec{u} = u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y} + u_z\overrightarrow{e_z}$ et $\vec{v} = v_x\overrightarrow{e_x} + v_y\overrightarrow{e_y} + v_z\overrightarrow{e_z}$ donc :

$\vec{u}.\vec{v} = \left(u_x\overrightarrow{e_x} + u_y\overrightarrow{e_y} + u_z\overrightarrow{e_z}\right).\left(v_x\overrightarrow{e_x} + v_y\overrightarrow{e_y} + v_z\overrightarrow{e_z}\right) =$ car $\overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_x} = 1$, $\overrightarrow{e_x}.\overrightarrow{e_y} = 0$, etc…

C'est vrai aussi dans **toute** base orthonormée comme la base cylindrique ou sphérique :

$\vec{u}.\vec{v} =$ ou encore $\vec{u}.\vec{v} =$ car $\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{e_r} = 1$, $\overrightarrow{e_r}.\overrightarrow{e_\theta} = 0$, etc…

➢ Pour un même vecteur, $\vec{v}.\vec{v} =$. Par ailleurs :

$\vec{v}.\vec{v} =$ car $\left(\vec{v},\vec{v}\right) = 0$ donc $v^2 = {v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$

On remarque aussi que $\vec{u}.\overrightarrow{e_x} = u_x$, $\vec{v}.\overrightarrow{e_\theta} = v_\theta$ et si $\vec{m} = m\,\overrightarrow{e_z}$ alors $\vec{m}.\overrightarrow{e_z} = m$ (revoir page 2).

➢ **Définitions d'une coordonnée selon l'axe i et de la norme d'un vecteur $\vec{u}$:**

$\boxed{\quad \overset{\text{déf}}{=} \quad}$ et $\boxed{\quad \overset{\text{déf}}{=} \quad}$

➢ Pour un même vecteur **unitaire**, $\overrightarrow{e_T}.\overrightarrow{e_T} =$ puisque $\left\|\overrightarrow{e_T}\right\| = 1$

On suppose que ce vecteur dépend d'une variable $\overrightarrow{e_T} = \overrightarrow{e_T}(\alpha)$ comme $\overrightarrow{e_r} = \overrightarrow{e_r}(t)$ ou $\overrightarrow{e_\theta} = \overrightarrow{e_\theta}(t)$

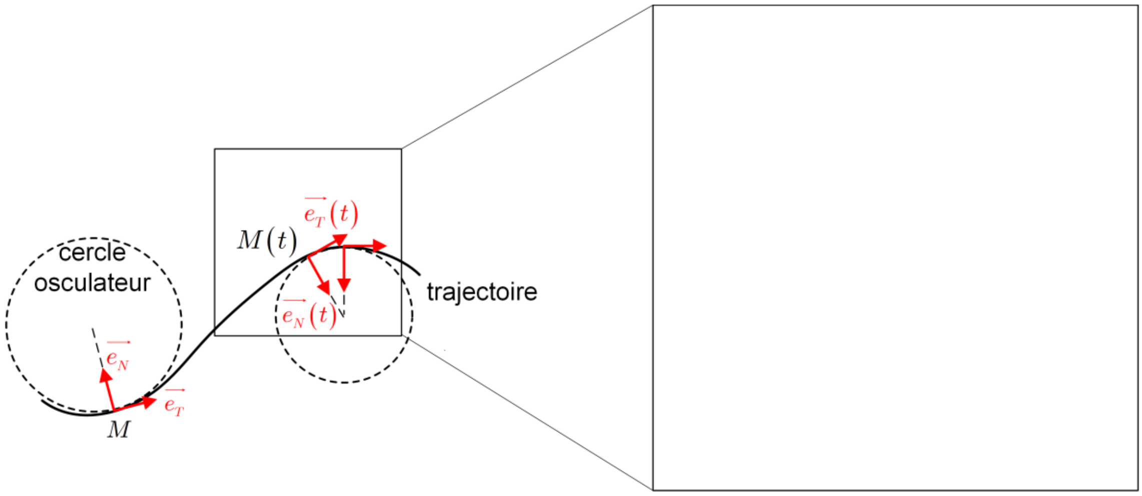
On dérive la relation $\overrightarrow{e_T}.\overrightarrow{e_T} = \ldots$ par rapport à α ce qui donne : $= \ldots$

En dérivant avec la propriété de **produit** : …

Grâce à la notation de Leibniz, en multipliant par $\frac{d\alpha}{2}$, … donc $\boxed{\ldots\ldots\ldots\ldots}$

La différentielle d'un vecteur unitaire ne dépendant que d'une seule variable est toujours ……………………………………………………………

2 . Construction des vecteurs unitaires



https://femto-physique.fr/simulations/evolute.php

Soit un point M sur une trajectoire quelconque, on définit un vecteur unitaire $\overrightarrow{e_T}$ dit …………………… car on veut qu'il soit tangent à la trajectoire. Comme la vitesse $\vec{v}(M) = \vec{v}$ est naturellement tangente à la trajectoire, on construit $\overrightarrow{e_T}$ à partir de la vitesse :

$\boxed{\overrightarrow{e_T} = \qquad \Leftrightarrow \qquad}$ où $v = \|\vec{v}\|$ la norme de la vitesse

L'accélération s'écrit alors $\vec{a} \overset{\text{déf}}{=} \frac{d\vec{v}}{dt} =$ (en utilisant $(uv)' = u'v + uv'$)

Localement, on considère le cercle tangent à la trajectoire au point M appelé ………… …………………… de rayon $R_c(t)$ appelé …………………………… On admet qu'il existe de façon unique un vecteur ………… $\overrightarrow{e_N}$ orienté vers l'intérieur du cercle et orthogonal à $\overrightarrow{e_T}$.

On suppose que **localement**, entre un instant t et $t+dt$, le point M s'est déplacé sur le cercle en ayant tourné d'un angle $d\alpha$ qu'on choisit **positif**. La distance parcourue sur le cercle osculateur par le point M vaut donc $\ldots=\ldots\ldots$ (voir définition d'un angle page 10).

Le vecteur $\overrightarrow{e_T}$ a également tourné d'un angle $d\alpha$.

On a vu que $\overrightarrow{de_T}\ldots\overrightarrow{e_T}$ et on a construit $\overrightarrow{e_N}\perp\overrightarrow{e_T}$ donc $\overrightarrow{e_N}$ et $\overrightarrow{de_T}$ sont .... :

Par ailleurs, **localement**, $\left\|\overrightarrow{de_T}\right\|$ est la longueur de l'arc intercepté par les vecteurs $\overrightarrow{e_T}(t)$ et $\overrightarrow{e_T}(t+dt)$. En utilisant à nouveau la formule $d\ell=Rd\theta$, on trouve que

Finalement, $\overrightarrow{de_T}=$ $\Rightarrow$ $\dfrac{\overrightarrow{de_T}}{dt}=$ or $\dfrac{d\alpha}{d\ell}=$ et $\dfrac{d\ell}{dt}=$

Donc $\dfrac{\overrightarrow{de_T}}{dt}=$ ce qui conduit pour l'accélération : $\boxed{\vec{a}=\qquad\qquad}$

avec $v=\|\vec{v}\|$ la norme de la vitesse et $R_c(t)$ le rayon du cercle tangent à la trajectoire

3 . Mouvement circulaire

Pour un mouvement **circulaire** et **uniforme**, $\ldots$

Donc l'accélération dans la base de Frenet s'écrit immédiatement $\boxed{\vec{a}=\qquad}$

➢ *Comparaison entre la base de Frenet et la base polaire*

Pour un mouvement **circulaire** centré en O, $\vec{v}=$ dans la base polaire et $\vec{v}=$ dans la base de Frenet, $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_T}$ sont colinéaires mais pas toujours égaux car $v=R\left|\dot{\theta}\right|$.

Dans le sens **trigonométrique**, $\theta\nearrow$ $\Rightarrow$

Dans le sens **horaire**,

Pour l'accélération, $\vec{a}=$

Puisque $\overrightarrow{e_\theta}$ et $\overrightarrow{e_T}$ sont colinéaires, $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_N}$ le sont aussi et comme $R\left(\dot{\theta}\right)^2>0$ et $\dfrac{v^2}{R}>0$:

$\boxed{\qquad=\qquad}$ quel que soit le sens du mouvement circulaire

Salviati : Il n'y a pas de vecteur-position dans la base de Frenet car la base est **locale** *i.e.* elle est définie par rapport au point M et non par rapport à un point O qui sert en général de référence dans un référentiel choisi. Lors d'un mouvement circulaire où on ne connaît pas le centre du cercle, la base de Frenet prend tout son sens (voir chapitre IV).

repère	**à utiliser si …**
	pas de rotation, une direction souvent l'axe x
	un axe privilégié, souvent l'axe z
	symétrie centrale
	mouvement plan

Table des matières