

Chapitre V

Filtrage linéaire

Dans ce chapitre, on se placera en *i.e.* on imposera à un circuit un signal sinusoïdal fourni par un générateur. D'après le chapitre II, tout signal périodique peut s'écrire sous la forme d'une combinaison linéaire de fonctions sinusoïdales donc étudier un signal sinusoïdal revient à étudier la réponse à n'importe quel signal.

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/general/synthese.html

Grandeurs principales :

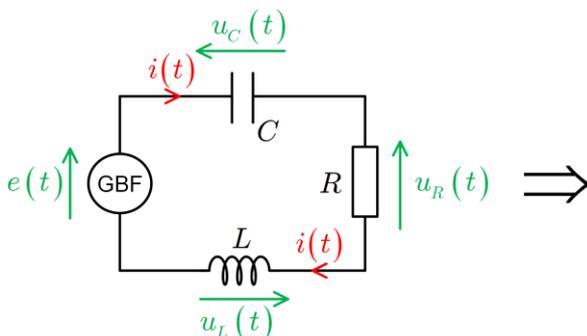
Grandeur physique	Symbole	Unité (Unité du S.I.)	Dimension	Apparition
pulsation du générateur	ω	rad.s ⁻¹	T^{-1}	chapitre II
amortissement				chapitre IV
facteur qualité				chapitre IV
impédance	 (.....)	$M L^2 T^{-3} I^{-2}$	chapitre IV
fonction de transfert	\underline{H}	pas d'unité	1	New!

S.I. : T : temps, L : longueur, M : masse, I : intensité, Θ : température, N : quantité de matière

I. Filtre passe-bande

Dans un circuit RLC en régime permanent sinusoïdal, on a vu que $\underline{I} = \frac{E/R}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)}$

En multipliant par $e^{j\omega t}$, on obtient : $\underline{i} =$



On remarque qu'on peut considérer le circuit RLC comme un ensemble de composants à travers lequel rentre un signal d'..... $e(t)$ et sort un signal de $s(t)$.

A. Fonction de transfert et gain

On a donc $\underline{s} =$ d'où $\frac{\underline{s}}{\underline{e}} =$

Le rapport sortie/entrée caractérise le filtre et s'appelle notée \underline{H} :

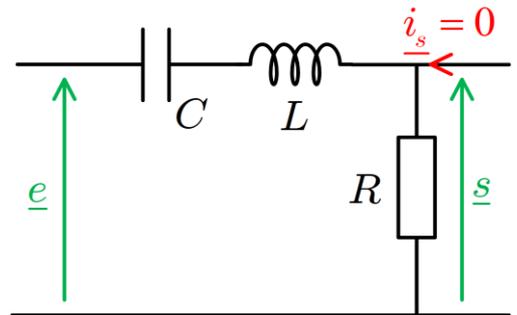
en sortie ouverte ... = ...

où \underline{s} et \underline{e} sont les signaux complexes d'entrée et de sortie

Etant donné que les dipôles sont en série dans le circuit, on aurait pu placer la bobine "en haut" et trouver \underline{H} à partir d'un pont diviseur de tension :

(bas de la page 9 du chapitre III)

$\underline{s} =$



En faisant passer R dessous et en utilisant $\frac{1}{j} = -j$, $\underline{H} = \frac{1}{1 + j \left(\frac{\dots}{\dots} - \frac{\dots}{\dots} \right)}$

Or $\frac{L\omega}{R} =$ $\frac{1}{RC\omega} =$ et on retrouve : $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{1}{\dots}$

On en déduit : ... = ... = $\frac{1}{\dots}$ et ... = \dots =

En acoustique, on mesure le niveau sonore en décibels G_{dB} en fonction de l'intensité sonore I : $G_{dB} = 10 \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$ où le 10 correspond aux "déci"bels. Mais la grandeur principale n'est

pas son intensité mais sa pression P telle que $I = P^2$ d'où $G_{dB} = 10 \log \left(\frac{P^2}{P_0^2} \right) = 20 \log \left(\frac{P}{P_0} \right)$.

Par analogie à l'acoustique, on définit en électricité le **gain en décibels** :

.....

où $\dots = |\underline{H}| = \dots = \dots = \dots$

Le gain vaut fois le en base 10 du de la fonction de transfert.

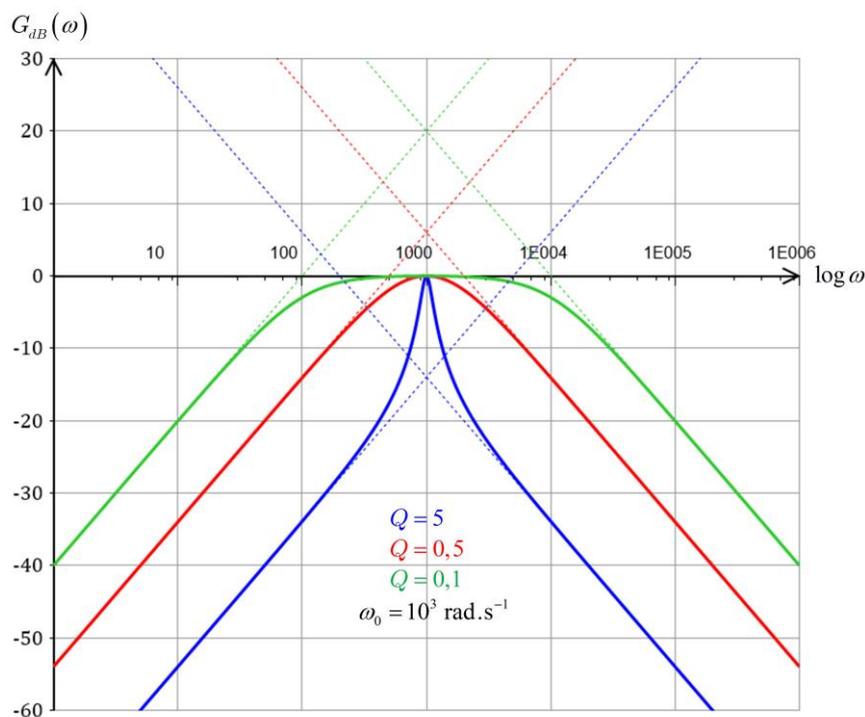
On peut écrire $G = |\underline{H}| = \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right)^{-1/2}$ et avec la propriété $\forall x > 0, \log(x^a) = a \log(x)$:

$G_{dB} =$

B. Diagramme de Bode (1938)

Le diagramme de Bode est

.....



L'échelle des ordonnées est **classique** mais l'échelle des abscisses n'est **pas** car on passe d'une graduation à une autre en multipliant la pulsation par 10, d'où la notion de, c'est une échelle Utiliser cette échelle permet de placer la pulsation ω directement sur le graphique sans avoir besoin de faire le calcul du $\log \omega$. L'échelle permet également de repérer les comportements linéaires. Pour ce filtre, on constate des zones rectilignes pour $\omega \ll \omega_0$ et $\omega \gg \omega_0$ quel que soit Q .

1. Approximations linéaires

Dans tous les domaines de la physique, pour déterminer le comportement asymptotique ou simplifier des expressions, on réalise des **approximations**.

Salviati : On ne compare que des nombres réels et cohérents : ni complexes, ni vecteurs.

Les expressions " $u_c(t) < i(t)$ " ou " $a + jb < c + jd$ " ou " $\vec{u} < \vec{v}$ " n'ont pas de sens.

➤ *Addition ou soustraction de nombres positifs :*

En électricité ou en chimie, à partir de $X \geq 10Y$, on peut considérer $\boxed{X \gg Y}$ avec $Y > 0$

Soit une somme $X+Y$, si $X \gg Y > 0$ alors $X+Y \approx \dots$. De même, $X-Y \approx \dots$

➤ *Addition ou soustraction de polynômes :*

Si $X \ll 1$ et $X > 0$ alors $aX^2 + bX + c \approx \dots$

Pour $X \ll 1$, un polynôme est équivalent à son terme

Si $X \gg 1$ alors $aX^2 + bX + c \approx \dots$

Pour $X \gg 1$, un polynôme est équivalent à son terme

➤ *Addition ou soustraction de complexes :*

Bien que moins rigoureux, on réalise les mêmes approximations avec les complexes :

Soit l'expression $-\omega^2 + 2j\lambda\omega_0\omega + \omega_0^2$, si $\omega \gg \omega_0$ alors

Objectif : Déterminer les équations des zones rectilignes du diagramme de Bode du RLC.

2. Asymptote croissante et domaine dérivateur

➤ Lorsque $\omega \ll \omega_0 \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{\omega} \dots\dots 1$, $G_{dB1} = -10 \log \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right) \approx$

Après simplification, $\underbrace{G_{dB1}}_y \approx \underbrace{\dots\dots}_a \underbrace{\dots\dots}_x \underbrace{\dots\dots}_{+b}$

Il s'agit d'une asymptote de coefficient directeur d'ordonnée à l'origine C'est l'équation de la zone rectiligne en

➤ Lorsque $\omega \ll \omega_0 \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{\omega} \dots\dots 1$, $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \approx$ donc $\underline{s} \approx \frac{\dots\dots}{\dots\dots} \underline{e}$.

En basses fréquences, on se rend compte que \underline{s} est
 \underline{s} apparaît donc comme une de \underline{e} (chapitre IV page 13).

Une pente à correspond à un comportement

3. Asymptote décroissante et domaine intégrateur

➤ Lorsque $\omega \gg \omega_0 \Leftrightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \dots\dots 1$, $G_{dB2} = -10 \log \left(1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 \right) \approx$

Après simplification, $\underbrace{G_{dB2}}_y \approx \underbrace{\dots\dots}_a \underbrace{\dots\dots}_x \underbrace{\dots\dots}_{+b}$

Il s'agit d'une
 C'est l'équation de la zone rectiligne en **hautes fréquences**.

➤ Lorsque

En hautes fréquences, on se rend compte que \underline{s} est
 \underline{s} apparaît donc comme une de \underline{e}

Une pente de correspond à un comportement

C . Propriétés d'un filtre

L'abscisse de l'intersection des asymptotes se détermine en résolvant = :

...

L'ordonnée de l'intersection des asymptotes vaut = =

Si $Q > 1$ alors $-20 \log Q \dots 0$, l'intersection en $\omega = \dots$ est **en dessous** de l'axe des abscisses.

Si $Q < 1$ alors $-20 \log Q \dots 0$, l'intersection est **au-dessus** de l'axe des abscisses.

On peut remarquer que $G_{dB}(\omega = \omega_0) =$

➤ Le filtre **laisse passer** le signal.

Salviati : G_{dB} ne donne qu'une information sur les amplitudes et non sur les phases, le signal est bien passé tel quel mais il a peut-être été déphasé, pour vérifier, on calcule φ .

Pour ce filtre RLC, $\varphi(\omega_0) = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega_0}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0}\right)\right) = -\arctan(0) = 0$ donc $\underline{s} = \underline{e}$ en $\omega = \omega_0$.

➤ $G_{dB} > 0 \Leftrightarrow G \dots \Leftrightarrow \frac{S}{E} \dots \Leftrightarrow S \dots E$. Le filtre **amplifie** le signal.

➤ $G_{dB} < 0 \Leftrightarrow$ Le filtre **atténue** le signal.

➤ Le filtre **ne laisse pas passer** le signal.

Pour ce filtre RLC, $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB} = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} G_{dB} = -\infty$, les hautes et basses fréquences

Les seules fréquences qui passent se trouvent autour de $f_0 = \omega_0/2\pi$ car le gain est nul c'est pourquoi il s'agit d'une filtre, il laisse passer une

Salviati : Ne pas confondre une limite $\omega \rightarrow 0$ avec une approximation $\omega \ll \omega_0$.

Lorsque $\lim_{\omega \rightarrow +\infty} G_{dB} = -\infty$, les fréquences ne passent pas, c'est un filtre

Lorsque $\lim_{\omega \rightarrow 0} G_{dB} = -\infty$, les fréquences ne passent pas, c'est un filtre

La fonction de transfert \underline{H} peut toujours s'écrire comme $\underline{H} = \frac{a_0 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 + \dots}{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \dots}$

L'**ordre** d'un filtre est donné par la puissance en ω la plus élevée au dénominateur.

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \text{Filtre d'ordre ...}$$

Pour n'importe quel filtre, $\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{S}{E} \Leftrightarrow$

Par identification, $S = \dots$ et $\varphi_s = \dots$ donc $\underline{s} =$ ce qui donne :

$$s(t) =$$

➤ Puisqu'il est possible d'étudier séparément les harmoniques d'un signal périodique (voir chapitre II page 18) alors un signal de la forme $e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_{e1}) + E_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_{e2})$ aura pour signal de sortie : $s(t) =$

➤ Pour un signal périodique quelconque : $e(t) = E_0 + \sum_{n=1} E_n \cos(\omega_n t + \varphi_{en})$, la sortie s'écrit :

$$s(t) = \text{avec } G_0 = G(\omega = 0) \text{ gain statique}$$

D . Effets d'un filtre sur un exemple

➤ Soit le signal $e(t) = 8 \left(\frac{1}{2} + \cos(10t) + \cos(10^3 t) + \cos(10^5 t) \right)$ qu'on filtre par le circuit RLC présenté au début du chapitre de facteur de qualité $Q = 0,1$. On cherche le signal $s(t)$.

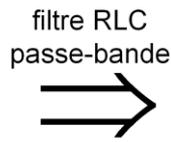
En développant, la composante continue vaut $E_0 = \dots$ V, elle correspond à $\omega = \dots$

Le filtre étant un passe-bande, il ne laisse pas passer les fréquences très donc la composante continue sera, $G(\omega = 0) = \dots$ donc $S(\omega = 0) = \dots$

Ensuite, le spectre d'entrée contient 3 raies à, et rad.s⁻¹ d'amplitude 8 V.

D'après le graphique de la page 3, $G_{dB}(\omega = 10) = G_{dB}(\omega = 10^5) = \dots = 20 \log G \Leftrightarrow G = \dots$

car $y = \log x \Leftrightarrow x = \dots^y$ d'où $S = E / \dots$, l'amplitude de ces deux composantes est
 La composante à 1000 rad.s⁻¹ correspond à ω_0 , elle passe telle quelle.

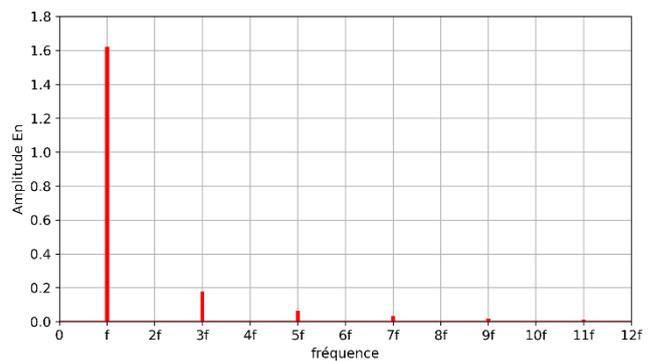
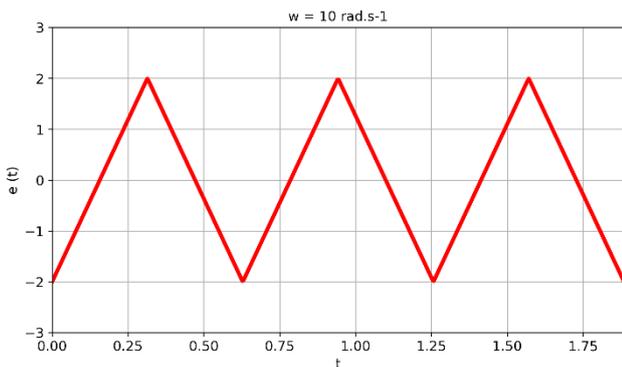


On aura finalement $s(t) =$

On remarque que $\langle e \rangle = \dots$ et $\langle s \rangle = \dots$, un filtre passe-haut ou passe-bande qui ne laissent donc pas passer les basses fréquences

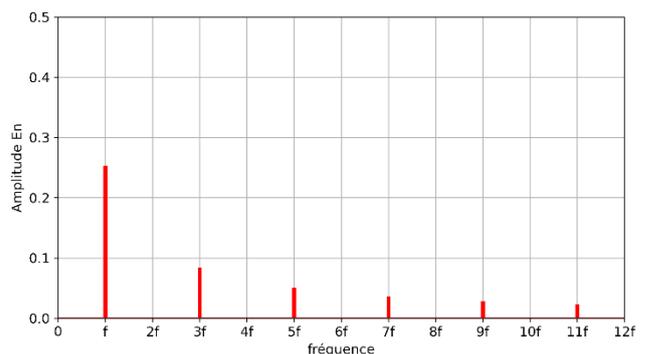
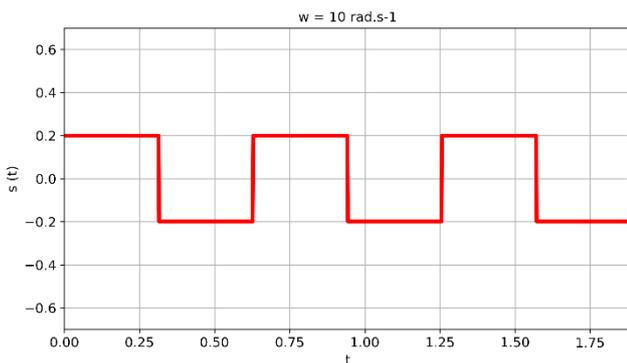
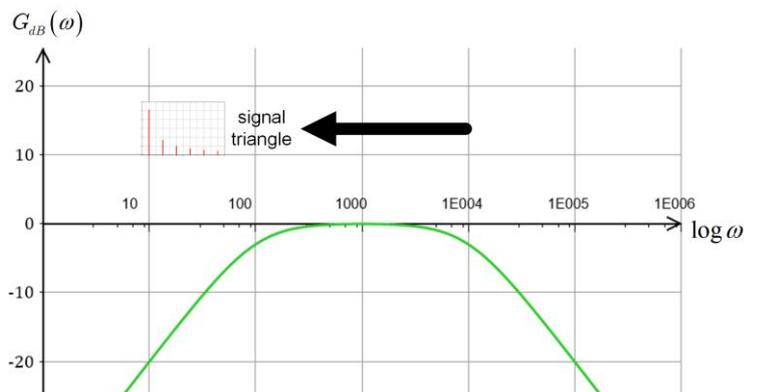
➤ Soit un signal **triangulaire** qui est un signal composé d'une infinité de segment de droite d'équation affine et décomposable en une infinité d'harmoniques impairs.

On suppose que ce signal a une pulsation $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$.



On filtre ce signal par le circuit RLC présenté de facteur de qualité $Q = 0,1$.

Comme $\omega \ll \omega_0$, le signal se retrouve dans le domaine des qui est un domaine et où le signal est On obtient le signal de même pulsation ω ci-dessous :



Comme $G_{dB} = \dots \Leftrightarrow G = \dots \Leftrightarrow S = E / \dots$. Le signal est atténué puisque divisé par ...

Un signal triangulaire est une succession de segments d'équation de la forme $y = ax + b$.

En dérivant, on obtient $y = \dots$. Sur la pente **montante** du triangle lors d'une demi-période, $a \dots 0$, sur la pente **descendante** lors de l'autre demi-période, $a \dots 0$. On obtient bien un signal qui a une valeur continue sur une demi-période et une valeur continue sur l'autre demi-période. Ainsi, on obtient l'allure d'un signal

On peut alors en déduire un ensemble d'effets du filtre sur le signal triangle :

filtre pulsation	$Q = 0,1$ large bande	$Q = 5$ sélectif
$\omega \ll \omega_0$		
$\omega \approx \omega_0$		
$\omega \gg \omega_0$		

➤ Pour $Q = 0,1$, $\omega \approx \omega_0$, le signal est dans la bande passante, le filtre laisse passer le fondamental et les premiers harmoniques donc on conserve un

➤ Pour $Q = 5$, $\omega \approx \omega_0$, le signal est dans la bande passante mais le filtre ne laisse passer que le fondamental donc il ne reste qu'un

➤ Pour $\omega \gg \omega_0$, le signal est dans le domaine et comme une primitive du binôme $ax + b$ est un trinôme de la forme $\frac{1}{2}ax^2 + bx + c$, on obtient des avec une lorsque la pente du triangle est montante et une parabole lorsque la pente du triangle est descendante.

II. Filtres du 1^{er} ordre

Soient 2 filtres au comportement opposé que l'on étudie en même temps :

Un circuit RC :

Un circuit RL :

Un pont diviseur donne : $\underline{s} = \frac{\underline{Z}_{\dots}}{\underline{Z}_{\dots} + \underline{Z}_{\dots}} \underline{e}$

Un pont diviseur donne : $\underline{s} = \frac{\underline{Z}_{\dots}}{\underline{Z}_{\dots} + \underline{Z}_{\dots}} \underline{e}$

Donc $\frac{s}{e} = \underline{H} = \frac{1}{\dots\dots\dots}$ d'où :

Donc $\frac{s}{e} = \underline{H} = \dots\dots\dots =$

$G = \frac{1}{\dots\dots\dots}$ et $\varphi =$

$G = \frac{1}{\dots\dots\dots}$ et $\varphi =$

D'où $G_{dB} =$

D'où $G_{dB} =$

Salvati : Ne pas confondre l'**arctangente** qui est une fonction à une variable (chapitre IV page 16) avec l'**argument** d'un complexe qui n'en est pas une (chapitre IV page 11).

A. Pulsations de coupure

On définit les **pulsations de coupure** ω_c d'un filtre telles que $G(\omega_c) = \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$ (ou $\frac{H_{\max}}{\sqrt{2}}$)

$G_{dB}(\omega_c) =$

$\Leftrightarrow G_{dB}(\omega_c) =$

Pour ces 2 filtres simples, le maximum est atteint lorsque $G_{\max} (= H_{\max}) = 1 \Leftrightarrow G_{dB\max} = 0$.

Il faut résoudre : $\frac{1}{\dots\dots\dots} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Il faut résoudre : $\frac{1}{\dots\dots\dots} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

...
 $\Leftrightarrow \boxed{\omega = \dots\dots\dots} = \frac{1}{\dots\dots\dots}$

...
 $\Leftrightarrow \boxed{\omega = \dots\dots\dots} = \frac{1}{\dots\dots\dots}$

On réécrit alors $\underline{H} =$

On réécrit alors $\underline{H} =$

Ce sont des filtres du **1^{er} ordre**

B. Diagramme de Bode

RC : $G_{dB} =$

RL : $G_{dB} =$

➤ $\omega \ll \omega_c \Leftrightarrow \dots\dots\dots$, $G_{dB1} \approx$

➤ $\omega \gg \omega_c \Leftrightarrow \dots\dots\dots$, $G_{dB2} \approx$

Ce filtre RC admet une asymptote dans les **basses** fréquences.

➤ $\omega \gg \omega_c \Leftrightarrow \dots, G_{dB2} \approx \dots$

$\Leftrightarrow \underbrace{\dots}_y \approx \underbrace{\dots}_a \underbrace{\dots}_x \underbrace{\dots}_{+b}$

Ce filtre RC admet une asymptote oblique de pente dans les **hautes** fréquences. D'ailleurs, $G_{dB}(\dots) = -\infty$.

Il ne laisse pas passer les fréquences, c'est un filtre

Ce filtre RL admet une asymptote dans les **hautes** fréquences.

➤ $\omega \ll \omega_c \Leftrightarrow \dots, G_{dB1} \approx \dots$

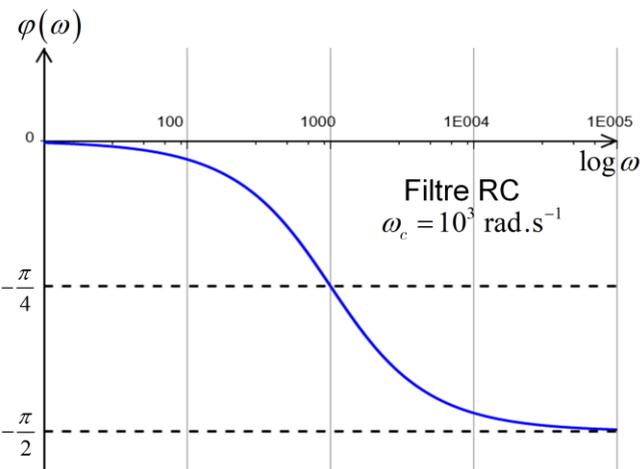
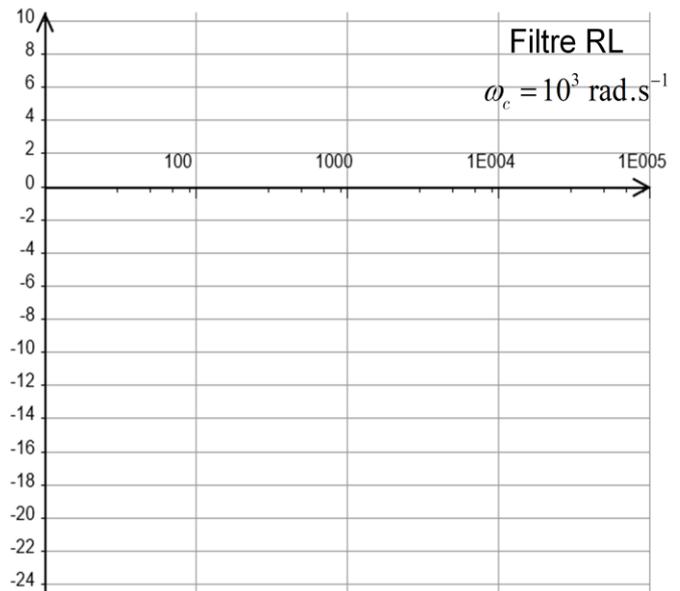
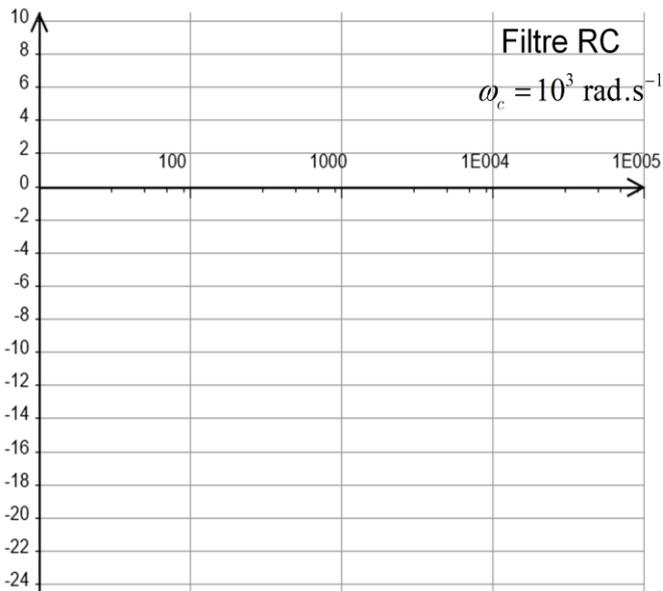
$\Leftrightarrow \underbrace{\dots}_y \approx \underbrace{\dots}_a \underbrace{\dots}_x \underbrace{\dots}_{+b}$

Ce filtre RL admet une asymptote oblique de pente dans les **basses** fréquences. D'ailleurs, $G_{dB}(\dots) = -\infty$.

Il ne laisse pas passer les fréquences, c'est un filtre

Pour les 2 filtres, $G_{dB}(\omega = \omega_c) \approx \dots$ et l'intersection des asymptotes a lieu en $\omega = \omega_c$.

Connaissant les asymptotes et $G_{dB}(\omega_c)$, on peut tracer les diagrammes de Bode :



C . Fonction moyenneur d'un filtre passe-bas

Contrairement à un filtre passe-bande ou un filtre passe-haut, le filtre passe-bas laisse donc passer les et en particulier, les signaux continus $e(t) = E$ ou la composante continue E_0 d'un signal quelconque $e(t) = E_0 + \sum_{n=1} E_n \cos(\omega_n t + \varphi_{en})$.

Salviati : Il existe 2 façons de comprendre qu'un signal constant a une fréquence nulle : Un signal continu contient un seul motif : une droite, donc possède une période infinie $T \rightarrow +\infty$ donc une fréquence nulle $f = 0$. On peut aussi écrire $e(t) = E = E_0 \cos(0 \times t + \varphi_{e0})$ avec E, E_0, φ_{e0} astucieusement liées entre elles par $E = E_0 \cos(\varphi_{e0})$ et on lit $\omega = 0 \Rightarrow f = 0$.

Soit un signal $e(t) = E_0 + \sum_{n=1} E_n \cos(\omega_n t + \varphi_{en})$ avec $\omega_n = n\omega$ et $\omega = 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$ que l'on filtre par un circuit RC de pulsation de coupure $\omega_c = 10^3 \text{ rad.s}^{-1}$. Comme $\boxed{\omega \dots \omega_c}$, tous les composantes spectrales ont des fréquences, le filtre

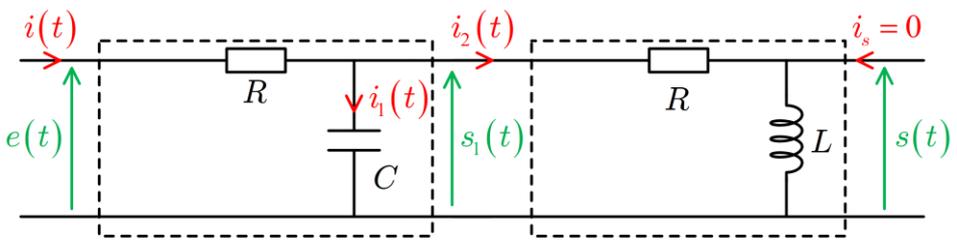
Cependant, la composante continue E_0 de fréquence nulle passe et on aura $s(t) \approx \dots$

Or $\langle e \rangle = \dots$ (chapitre II page 17) donc $\boxed{\dots}$

Le filtre passe-bas renvoie

D . Mise en cascades de filtres

Soit le circuit suivant où on a mis les 2 filtres RC et RL en cascade :



Par construction, l'intensité du courant qui traverse le condensateur **n'est pas** i , on le note i_1 , par contre, l'intensité du courant qui traverse la bobine **est bien** i_2 car $i_s = 0$.

1 . Fonction de transfert

On peut donc utiliser un pont diviseur de tension avec R et L **mais pas** avec R et C :

$\underline{s} =$ avec $\omega_{c2} = \frac{R}{L}$ mais que vaut $\underline{H}_1 = \frac{s_1}{e}$?

Une façon astucieuse de déterminer \underline{H}_1 est de trouver l'impédance équivalente \underline{Z} de la partie de droite avec C, R, L et correspondant à \underline{s}_1 .

$\underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + jL\omega \Rightarrow \underline{Z} =$ (chapitre III page 10).

D'où $\underline{Z} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$. Pont diviseur encore : $s_1 = \frac{\dots}{\dots + \dots} e$

Et donc $\underline{H}_1 = \frac{s_1}{e} = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z}}$ avec $\frac{R}{Z} = \neq jRC\omega$ (haut de la page 9)

La présence du 2^{ème} filtre modifie complètement la fonction de transfert du 1^{er} filtre. Le problème vient du courant i_2 qui n'est pas nul. Comment négliger le courant i_2 pour que \underline{H} puisse s'écrire comme produit des fonctions de transfert de chaque filtre ?

➤ On définit l'impédance d'entrée comme

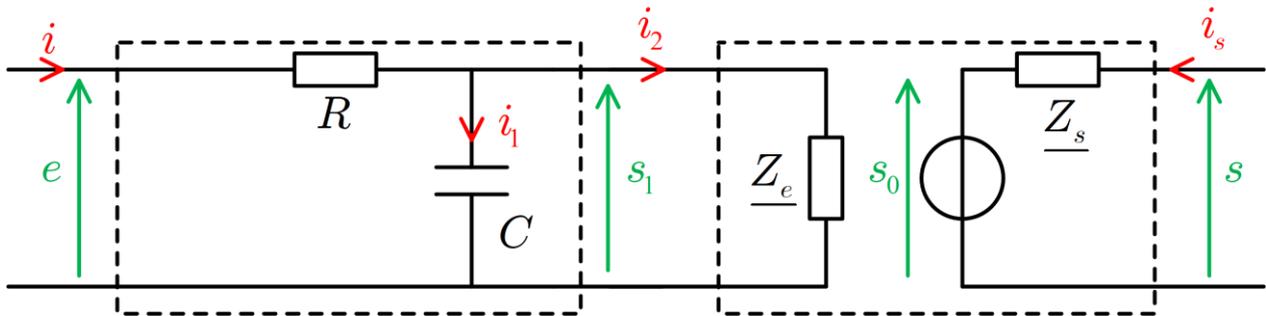
en sortie ouverte ... = ...

➤ On définit l'impédance de sortie comme

en entrée fermée ... = ...

2. Impédance d'entrée

Le schéma équivalent du filtre avec ses impédances d'entrée et sortie donne :



➤ Appliqué au 2nd filtre, $\underline{Z}_e = \frac{s_1}{i_2}$ avec $i_s = 0$. Pour que $i_2 = 0$, il faut donc que $\underline{Z}_e \rightarrow \dots\dots$

En effet, \underline{Z}_e est équivalente à, ce qui donne :

$$\underline{Z}_e = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L = R + jL\omega$$

On avait en haut de la p.12 : $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_L} =$ pour $\underline{Z}_e \rightarrow +\infty$ donc $\underline{Z} = \dots\dots$

On a alors $\underline{H}_1 = \frac{1}{1 + \frac{R}{Z}}$, on retrouve la fonction de transfert du circuit RC.

3. Impédance de sortie

Appliqué au 2nd filtre, $\underline{Z}_s = \frac{s}{i_s}$ avec $s_1 = 0$ (fil), $\boxed{i_s \neq 0}$

L'impédance de sortie est donc équivalente à

..... :

...

Dans la réalité, le courant de sortie i_s n'est pas nul, l'impédance de sortie devient utile :

s_{01} et s_{02} sont les **tensions à vide** de chaque filtre, ils sont tels que : $\underline{H}_{01} = \frac{s_{01}}{e}$ et $\underline{H}_{02} = \frac{s_{02}}{s_1}$

\underline{H}_{01} et \underline{H}_{02} sont les fonctions de transfert à **vide**, celles calculées page 9 avec $i_s = 0$.

Lois des mailles : \Leftrightarrow et \Leftrightarrow

Si \underline{Z}_{s1} et \underline{Z}_{s2} sont voire alors $s_{01} \approx \dots$ et $s_{02} \approx \dots$ donc :

$$\underline{H}_1 = \frac{s_1}{e} \approx \frac{\dots}{\dots} \text{ et } \underline{H}_2 = \frac{s}{s_1} \approx \frac{\dots}{\dots} \text{ d'où } \underline{H} =$$

Lors de la mise en cascade de filtres,

.....

III. Filtre du 2nd ordre : le sismomètre

Le sismomètre passif est constitué d'un pendule mécanique et d'un transducteur du type aimant/bobine. La tension de sortie s est directement enregistrée avec un appareil adéquat de très forte impédance d'entrée Z_e pour ne pas perturber le capteur.

Si l'enregistreur n'a pas une forte impédance d'entrée, un courant non négligeable circule dans la bobine et produit une force électromotrice qui perturbe le pendule.

A. Analogie électromécanique

L'équation du pendule soumis à une accélération du sol $\ddot{x}(t)$ s'écrit : $\ddot{z} + 2\beta\omega_0\dot{z} + \omega_0^2 z = -\ddot{x}$.

En notation complexe, $\underline{x}(t) = \underline{x}_0 e^{j\omega t}$ et $\underline{z}(t) = \underline{z}_0 e^{j\omega t}$

où \underline{x}_0 et \underline{z}_0 sont les de l'entrée et de la sortie. L'équation en complexe s'écrit :

...

La fonction de transfert s'écrit alors :

$$\underline{H} = \text{.....} \quad (\text{filtre du 2}^{\text{ème}} \text{ ordre})$$

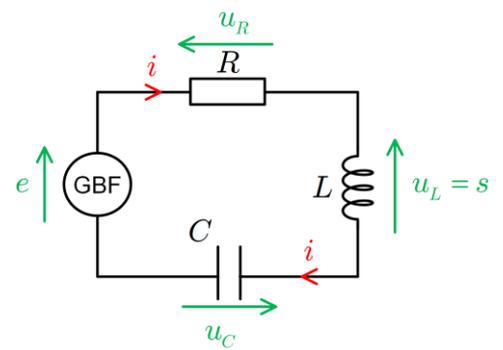
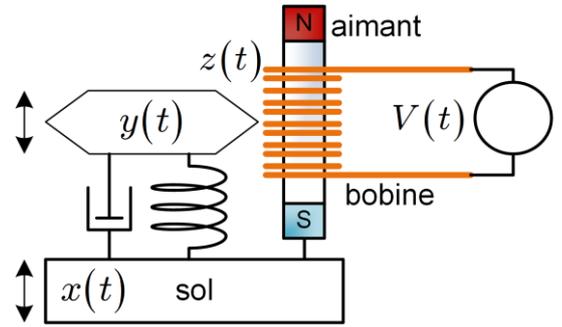
Le sismomètre passif est analogue à un circuit RLC soumis à un générateur de tension $e(t)$ où l'équation vérifiée par $u_L(t)$ est telle que : $\ddot{u}_L + 2\lambda\omega_0\dot{u}_L + \omega_0^2 u_L = \ddot{e}$

L'opposé de l'accélération du sol $-\ddot{x}(t)$ est analogue à la dérivée 2^{nde} de l'entrée $e(t)$.

La bobine est fixée à une masse d'inertie et c'est la vitesse \dot{z} de cette masse qui est proportionnelle à la tension V . On note σ le coefficient de proportionnalité : $V = \sigma \dot{z}$.

De manière plus réaliste, on utilise la fonction de transfert : $\underline{H}' = \frac{V}{\dot{x}} = \frac{\sigma \dot{z}}{\dot{x}} = \frac{\sigma z}{x} = \sigma \underline{H}$

L'amplitude sera donc multipliée par le coefficient σ mais la phase reste inchangée.



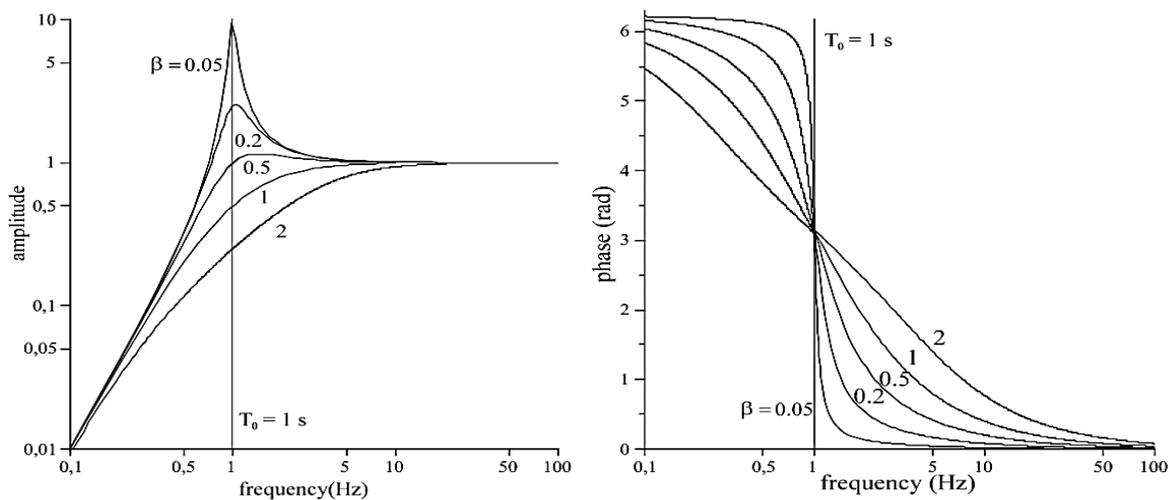
B. Diagramme de Bode

La fonction de transfert se réécrit comme : $\underline{H} = \text{.....}$

Donc $G = \frac{1}{\text{.....}} \Rightarrow G_{dB} = \text{.....}$

On remarque que $G_{dB}(\omega=0) \rightarrow \text{.....}$ et $G_{dB}(\omega \rightarrow +\infty) = \text{.....}$

Le sismomètre est donc un filtre du



On observe comme pour tous les filtres du 2^{ème} ordre un phénomène de qui n'a lieu que pour $\beta \ll 1$ donc un facteur de qualité Q La fréquence propre est de On remarque qu'à la résonance, $\varphi = \varphi_s - \varphi_e = \dots \Leftrightarrow \varphi_s = \varphi_e + \dots$, la sortie est avec l'entrée ce qui est cohérent avec le signe moins qui apparaît dans \underline{H} .

IV . Quelques filtres passifs

circuit	filtre	fonction de transfert	paramètres
R,C ; L,R	passe-bas 1 ^{er} ordre		$\omega_c = \frac{1}{\tau}$ $\tau = RC$ ou $\tau = \frac{L}{R}$
C,R ; R,L	passe-haut 1 ^{er} ordre		
RL,C	passe-bas 2 ^{ème} ordre	$\frac{1}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = \frac{1}{2\lambda} = \frac{1}{RC\omega_0}$
RC,L (sismomètre)	passe-haut 2 ^{ème} ordre	$\frac{1}{1 + \frac{1}{Q} \frac{\omega_0}{j\omega} + \left(\frac{\omega_0}{j\omega}\right)^2}$	
LC,R	passe-bande 2 ^{ème} ordre		
R,LC	coupe-bande 2 ^{ème} ordre	$\frac{1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}{1 + \frac{j\omega}{Q\omega_0} + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2}$	

Table des matières

I . Filtre passe-bande	1
A . Fonction de transfert et gain.....	2
B . Diagramme de Bode (1938)	3
1 . Approximations linéaires	3
2 . Asymptote croissante et domaine dérivateur	4
3 . Asymptote décroissante et domaine intégrateur	4
C . Propriétés d'un filtre	5
D . Effets d'un filtre sur un exemple	6
II . Filtres du 1 ^{er} ordre	8
A . Pulsations de coupure	9
B . Diagramme de Bode	9
C . Fonction moyennneur d'un filtre passe-bas	11
D . Mise en cascades de filtres	11
1 . Fonction de transfert	11
2 . Impédance d'entrée.....	12
3 . Impédance de sortie	13
III . Filtre du 2 nd ordre : le sismomètre	13
A . Analogie électromécanique	14
B . Diagramme de Bode	14
IV . Quelques filtres passifs	15
Table des matières	16