Chapitre IV
Circuits linéaires

La plupart des circuits électriques comportent à la fois des condensateurs et des bobines. Beaucoup de phénomènes physiques peuvent être ramenés à des problèmes électriques grâce à leurs analogies mathématiques d'où l'intérêt d'étudier des circuits avec ces deux composants pour ensuite les transposer à d'autres domaines.

Terminale (expertes)
- Ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.
- Partie réelle et partie imaginaire. Opérations. Conjugaison. Propriétés algébriques.
- **Inverse** d'un nombre complexe non nul. Module d'un produit, d'un inverse.
- Image d'un nombre complexe. Image du conjugué.
- Module d'un nombre complexe. Interprétation géométrique. Relation $|z|^2 = z\overline{z}$.

Grandeurs principales :

Grandeur physique	Symbole	Unité (Unité du S.I.)	Dimension	Apparition
charge électrique	Q, q	C (.........)		2nde
intensité du courant	I, i	A		Cycle 4 (3ème)
tension électrique	U, u	V (.........................)	$M.L^2.T^{-3}.I^{-1}$	Cycle 4 (3ème)
résistance	R	Ω (.........................)	$M.L^2.T^{-3}.I^{-2}$	Cycle 4 (3ème)
capacité	C	F (.........................)	$M^{-1}.L^{-2}.T^{4}.I^{2}$	Terminale
auto-inductance	L	H (.........................)	$M.L^2.T^{-2}.I^{-2}$	chapitre III

S.I. : T : temps, L : longueur, M : masse, I : intensité, Θ : température, N : quantité de matière

MATHS
- Equation différentielle du 2nd ordre avec et sans second membre, complexes.

I . Régime libre d'un circuit LC

Soit un circuit **idéal** ne comportant qu'une bobine et un condensateur. Puisqu'il n'y a pas de résistance, les pertes par effet Joule sont considérées comme **nulles** donc ce circuit n'existe pas dans la réalité.
A $t = 0$, il n'y a plus de générateur dans le circuit.
Le circuit est en **régime libre**.
Juste avant l'instant initial, on a chargé le condensateur.

Sa charge initiale vaut donc $q(t=0) = \ldots\ldots$

A . Etablir l'équation différentielle

Loi des mailles (sens horaire) pour $t>0$: $-u_L(t)-u_C(t)=0$ donc :

$$u_L(t)+u_C(t)=0$$

En utilisant les lois linéaires : $u_L(t)=$ et $u_C(t)=\frac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots}$:

$\Leftrightarrow$ $\boxed{}$ (LC libre)

On aboutit à une équation différentielle **linéaire** (……………, ……………) du **2ème ordre** (………………) **à coefficients constants** (……………………), **sans** second membre.

Analyse dimensionnelle : $\left[\frac{1}{LC}\right]=$ homogène à des ……

On pose $\ldots\ldots=\frac{1}{LC}$ pour obtenir l'équation d'un **……………… ………………** ……………… :

$$\boxed{\Leftrightarrow}$$

La **………………… propre** en rad.s⁻¹ et la **………….. propre** en s du circuit LC s'écrivent :

$\boxed{}$ et $\boxed{}$

B . Résoudre l'équation différentielle

On suppose que la solution ressemble à celle des équations du 1er ordre donc la solution **homogène** est du type exponentiel, c'est une astuce mathématique de résolution :

$$\boxed{q(t)=}$$

où K dépend des conditions initiales, r un nombre constant à déterminer

D'où $\dot{q}(t)=$ et $\ddot{q}(t)=$. En réinjectant dans l'équation différentielle, on obtient :

Comme $q(t)\neq 0$, l'équation différentielle revient à résoudre une équation du **2nd degré** :

$\boxed{\ldots\ldots+\ldots\ldots=0}$ **………………… ………………………** où r est une racine de l'équation

Les seules solutions possibles sont **……………… ………** : $r_1=\ldots\ldots$ et $r_2=\ldots\ldots$ où $\boxed{j^2=-1}$.

Salviati : En maths, on le note i mais en physique, "i" est utilisée pour l'intensité.

La solution de l'équa. diff. est une combinaison **linéaire** utilisant les deux racines :

$$q(t)=$$

On pose astucieusement $K_1=\dfrac{A-jB}{2}$ et $K_2=\dfrac{A+jB}{2}$

En utilisant les formules d'Euler (formulaire), la solution dite **homogène** s'écrit alors :

$$\boxed{q(t)= \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

avec A,B des constantes à déterminer et $\ldots\ldots=\dfrac{1}{\sqrt{\ldots\ldots}}$ la pulsation **propre** du circuit LC.

Sagredo : On a vu au chapitre II qu'on peut utiliser aussi $q(t)=Q\cos(\omega_0 t+\varphi)$ (voir TD4)

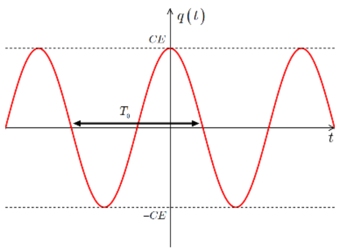
L'intensité du courant s'écrit : $\boxed{i(t)=\dfrac{dq(t)}{dt}= \qquad\qquad\qquad\qquad}$

➢ *Expliciter les conditions initiales :*

A $t=0^-$, le générateur de tension E a chargé complètement le **condensateur** qui se comporte alors comme un interrupteur **..............** donc $q(0)=\ldots\ldots\ldots\ldots=CE$ et $i(0^-)=\ldots$

Il doit y avoir **continuité** de l'intensité dans la **bobine** donc $i(0^-)=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

➢ *Etablir le système de 2 équations à 2 inconnus A,B :*

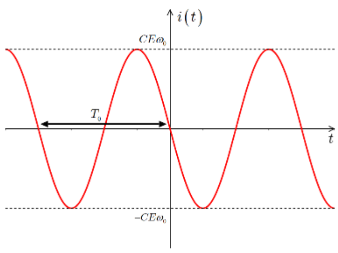


D'après l'expression, $q(0)=$

D'après l'expression, $i(0)=$

Par identification, $\begin{cases}\ldots=\ldots\ldots\\ \ldots\ldots=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\ldots=\ldots\ldots\\ \ldots=0\end{cases}$ car $\omega_0\neq 0$

d'où $\boxed{q(t)= \qquad\qquad}$ (**ne pas** apprendre par cœur)



La charge est un ....

Le condensateur se charge et se décharge dans le temps.

Par dérivation de q ou en remplaçant A et B dans i : $\boxed{i(t)= \qquad\qquad}$

$u_C(t)=\dfrac{q(t)}{C}$ et $u_L(t)=L\dfrac{di(t)}{dt}$ d'où : $\boxed{u_C(t)= \qquad\qquad}$ et $\boxed{u_L(t)= \qquad\qquad}$

C . Réaliser un bilan énergétique

L'énergie du condensateur s'écrit : $E_C(t)=$

L'énergie de la bobine s'écrit : $E_L(t)=$

L'énergie totale s'écrit : $E_T(t) =$

Les énergies du condensateur et de la bobine sont identiques mais déphasées de $\frac{\cdots}{\cdots}$

Toutes les ………………., chacun leur tour, un des deux composants atteint le maximum d'énergie emmagasinée. Comme pour les systèmes mécaniques où l'énergie potentielle et l'énergie cinétique sont échangées, l'énergie du condensateur est fournie totalement à la bobine à $\frac{\cdots}{\cdots}$ qui la restitue totalement au condensateur à $\frac{\cdots}{\cdots}$ et ainsi de suite.

L'énergie totale fournie au départ par un générateur et stockée dans le condensateur se conserve par un ……………………………………………. Elle ne diminue pas au cours du temps puisqu'il n'y a pas de résistance donc pas de perte par effet Joule : $E_T = \ldots\ldots\ldots$

II . Circuit RLC

A . Régime libre

Soit le schéma d'un circuit RLC ci-contre :

1 . Etablir l'équation différentielle

A l'instant initial, le condensateur est **chargé** tel que $q(0) = CE$.

A $t > 0$, il n'y a plus de générateur donc il fonctionne en **régime libre**.

Loi des mailles : $u_L(t) + u_C(t) + u_R(t) = 0$

Lois linéaires : $u_R(t) =$, $u_L(t) =$, $u_C(t) =$ d'où

$\Leftrightarrow$ $\boxed{}$ (RLC libre)

On aboutit à une équation différentielle **linéaire** du 2nd ordre (dérivée seconde) à coefficients constants sans second membre (régime libre). L'inconnue est la fonction du temps $q(t)$. En prenant $\ldots = \ldots$, on retrouve l'équation du circuit LC vue dans le I.

Puisque l'équation est **linéaire**, la tension $u_C(t)$ proportionnelle à $q(t)$ est aussi solution de cette équation, en divisant tout par C : $\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \frac{\ldots}{\ldots}\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\ldots\ldots}u_C(t) = 0$

2 . Simplifier les expressions

On pose les grandeurs suivantes :

- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = (LC)^{-\ldots/\ldots}$ la **pulsation propre** du circuit RLC ou LC en rad.s⁻¹.

- $\lambda =$ le **coefficient d'amortissement** sans unité.

Il est proportionnel à R qui est responsable des pertes d'énergie par effet Joule.

- $Q = \frac{1}{2\lambda} =$ le **……………… de ………………** sans unité.

Plus R est faible, plus les pertes d'énergie seront …………… et plus Q sera ……………

- $\omega =$ la **……………………… propre** du circuit RLC en rad.s⁻¹.

Cette pseudo-pulsation **n'existe que lorsque** $\lambda < \ldots$ **ou** $Q \ldots \frac{\ldots}{\ldots}$

L'équation différentielle peut donc s'écrire sous **………………………………** :

	ou	

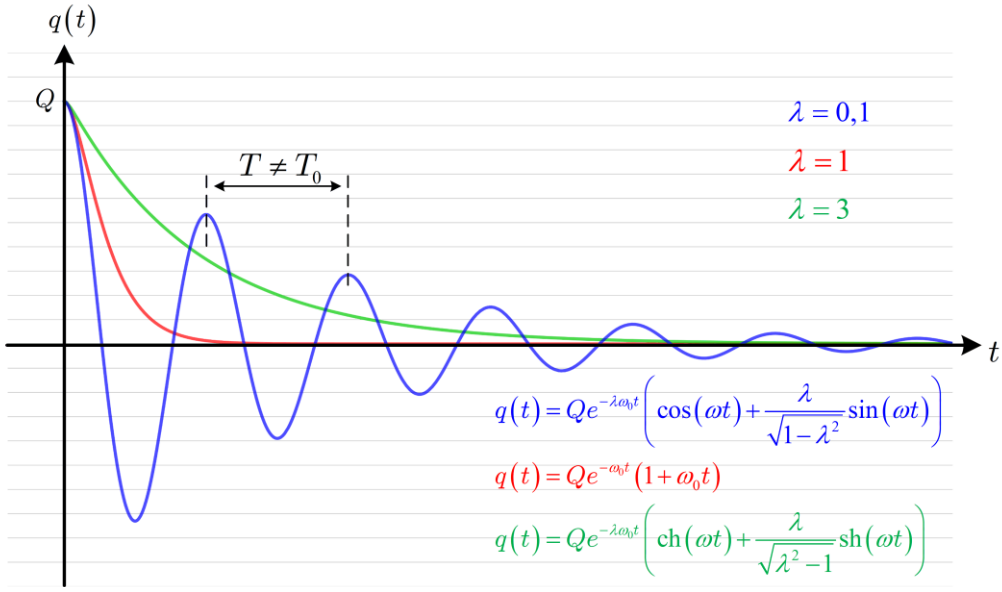
3 . Observer les solutions de l'équation

Il existe 3 évolutions possibles à partir de l'équation différentielle :

a) Le **régime apériodique** : la charge décroît rapidement et l'intensité augmente fortement au départ puis elles tendent vers 0 comme une exponentielle décroissante.

b) Le **régime critique** : régime particulier intermédiaire où le comportement ressemble au régime apériodique mais le circuit RLC atteint le régime permanent plus rapidement.

c) Le **régime pseudo-périodique** : la charge et l'intensité diminuent lentement en oscillant. Ce régime est celui d'un **……………… ………………** ………………



Allure des différents régimes pour $Q = 1\,\mathrm{C}$, $\omega_0 = 5\,\mathrm{rad.s^{-1}}$

Conditions initiales : $q(t=0) = Q$, $i(t=0) = 0$ *(voir TD4)*

➢ Le régime ……………………………, "**pseudo**" pour faux, admet une **pseudo-période**

$T =$. Ce régime est valable pour $Q > \frac{1}{2}$ ou $\lambda < 1$. Plus λ est faible, plus la possibilité d'obtenir des oscillations est grand (courbe ………..).

➢ Le régime ………………… tend le plus vite vers 0 pour $Q = \frac{1}{2}$ ou $\lambda = 1$ (courbe ………..).

➢ Le régime ………………… ressemble aux allures du circuit RC ou RL en régime libre et tend vers 0 sans oscillations pour $Q < \frac{1}{2}$ ou $\lambda > 1$ (courbe ………..)

4 . Résoudre l'équation différentielle

Même astuce mathématique que le circuit LC : $\boxed{q(t) = Ke^{rt}}$

où K dépend des conditions initiales, r un nombre constant à déterminer

$\dot{q}(t) =$ et $\ddot{q}(t) =$. L'équation différentielle devient : $(\ldots + \ldots\ldots + \ldots)Ke^{rt} = 0$

Comme $q(t) \neq 0$, l'équation différentielle revient à résoudre une équation **du 2nd degré** :

$\boxed{\ldots + \ldots\ldots + \ldots = 0}$ où r est une racine de l'équation

Ce trinôme est le **………………… ……………………** de l'équation différentielle. On cherche les différentes racines, solutions de l'équation classique en fonction du discriminant Δ :

$\Delta =$

Le signe de Δ dépend de la valeur de Q ou de λ : il y aura donc 3 cas possibles correspondant chacun à un régime vu précédemment dans la partie 3.

➢ ***Régime apériodique :*** $Q<\frac{1}{2}$, $\lambda>1$, $\Delta>0$: Les 2 solutions du polynôme sont **...........** :

$r_1=\frac{\ldots\ldots -\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}}{2}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ et $r_2=$

La solution est une combinaison **linéaire** utilisant les 2 racines : $q(t)=K_1e^{r_1t}+K_2e^{r_2t}$

$$\boxed{q(t)=e^{-\lambda\omega_0 t}\left(K_1e^{\ldots\ldots\ldots\ldots}+K_2e^{\ldots\ldots\ldots\ldots}\right)}$$

où K_1, K_2 sont des constantes à déterminer avec les conditions initiales.

L'exponentielle décroissante $e^{-\lambda\omega_0 t}$ impose un profil **décroissant**. L'amortissement est suffisamment fort pour que le condensateur se décharge vite ....

➢ ***Régime critique :*** $Q=\frac{1}{2}$, $\lambda=1$, $\Delta=0$: La seule solution est **.........** : $r=\frac{\ldots\ldots\ldots}{\ldots}=-\omega_0$

L'équa. diff. étant du 2ème ordre, il faut 2 constantes d'intégration et on montre que :

$$\boxed{q(t)= \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

où K_1, K_2 sont des constantes à déterminer par les conditions initiales.

L'exponentielle décroissante $e^{-\omega_0 t}$ impose un profil **décroissant**. La fonction affine K_1+K_2t conduit à un retour au régime permanent plus rapide que le régime apériodique.

➢ ***Régime pseudo-périodique :*** Q , $\lambda\ldots\ldots$, $\Delta\ldots\ldots$: Les 2 solutions sont **..............** :

$r_1=\frac{-2\lambda\omega_0-j\sqrt{-\Delta}}{2}=\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots<0$ et $r_2=$

j est tel que $\left(j\sqrt{-\Delta}\right)^2=\ldots\ldots$ En utilisant la notation ω : $r_1=\ldots\ldots+\ldots\ldots$ et $r_2=\ldots\ldots-\ldots\ldots$

La solution de l'équa. diff. est une combinaison **linéaire** utilisant les 2 racines :

$$\boxed{q(t)= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

où K_1, K_2, A, B sont des constantes à déterminer par les conditions initiales (voir TD4).

L'exponentielle décroissante $e^{-\lambda\omega_0 t}$ impose un profil **décroissant** comme les autres régimes. Mais l'amortissement est suffisamment faible pour observer .... Le régime n'est pas périodique car le signal ne se répète pas au cours du temps, il s'atténue, c'est pourquoi on dit pseudo-périodique.

➢ ***Régime périodique :*** $Q\to+\infty$, $\lambda=\ldots$, $\omega=\ldots\ldots$, $\Delta=\ldots\ldots$

Lorsque $R=\ldots$, on retrouve la solution de l'équa. différentielle du circuit LC :

$q(t)=$ (solution de l'oscillateur harmonique)

5 . Bilan d'énergie RLC libre

Au départ, le condensateur est **..............**, il se comporte comme un interrupteur **ouvert**. Pour un temps infini, il est .... mais se comporte toujours comme un interrupteur ouvert lorsqu'on atteint le régime permanent donc $i(t=0)=\dots$ et $i(t\to+\infty)=\dots$

D'où la variation d'énergie dans la bobine : $W_L =$

Quel que soit le régime transitoire, le régime permanent est tel que $q(t\to+\infty)=0$.

Donc $u_C(t\to+\infty)=0$. On sait par ailleurs que $q(0)=CE$ donc $u_C(0)=E$.

D'où la variation de l'énergie dans le condensateur : $W_C =$

L'énergie stockée dans le condensateur peut être échangée avec la bobine en régime pseudo-périodique mais finit par être dissipée totalement par la résistance.

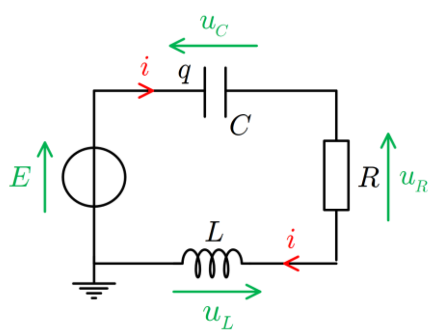
Au lieu de calculer l'énergie W_R par l'intégrale de puissance ce qui est très difficile, on peut la déterminer rapidement par la conservation de l'énergie : $W_R+W_L+W_C=0$ d'où :

$W_R =$. Cette énergie est dissipée sous forme de chaleur par effet Joule.

B . Réponse à un échelon

Soit le schéma d'un circuit RLC ci-contre :

1 . Etablir l'équation différentielle



A l'instant initial, le condensateur est **déchargé** tel que $q(0)=0$. A $t>0$, un générateur fournit une tension continue E dans le circuit donc il fonctionne en **régime ....**

Loi des mailles : $-u_L(t)-u_C(t)-u_R(t)+\dots\dots=0$

On a donc $u_L(t)+u_C(t)+u_R(t)=\dots$ d'où

$$L\frac{d^2q(t)}{dt^2}+R\frac{dq(t)}{dt}+\frac{q(t)}{C}=\dots \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2q(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dq(t)}{dt}+\frac{1}{LC}q(t)=\frac{\dots}{\dots}}$$ (RLC forcé)

On aboutit à une équation différentielle linéaire du 2ème ordre (dérivée seconde) à coefficients constants **avec** second membre (régime forcé). L'équation différentielle peut donc s'écrire sous **forme canonique** :

$$\boxed{\ddot{q}(t)+2\lambda\omega_0\dot{q}(t)+\omega_0{}^2q(t)=\dots\dots\dots}$$ ou $$\boxed{\ddot{q}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{q}(t)+\omega_0{}^2q(t)=\dots\dots\dots}$$

Allure des différents régimes pour $Q = 1\,\mathrm{C}$, $\omega_0 = 5\,\mathrm{rad.s^{-1}}$
Conditions initiales : $q(t=0) = Q$, $i(t=0) = 0$ *(voir TD4)*

2. Résoudre l'équation différentielle

La solution **générale** est la somme du terme **homogène** $q_h(t)$ vu page 7 et d'une solution **particulière** de la même forme que le second membre et on montre que $q_p(t) = \ldots\ldots\ldots$

- En régime apériodique : $\boxed{q(t) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$
- En régime critique : $\boxed{q(t) = \qquad\qquad}$
- En régime pseudo-périodique : $\boxed{q(t) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$

3. Bilan d'énergie RLC forcé

Au départ, le condensateur est **déchargé**, il se comporte comme un interrupteur **ouvert**. Pour un temps infini, il est **chargé** mais se comporte toujours comme un interrupteur ouvert lorsqu'on atteint le régime permanent donc $i(0) = \ldots$ et $i(t \to +\infty) = \ldots$

D'où la variation de l'énergie dans la bobine : $W_L = \frac{1}{2}Li^2(+\infty) - \frac{1}{2}Li^2(0) = \ldots$

Quel que soit le régime transitoire, le régime permanent est tel que $q(t \to +\infty) = \ldots\ldots$

Donc $u_C(t \to +\infty) = \ldots$ On sait par ailleurs que $q(0) = 0$ donc $u_C(0) = 0$.

D'où la variation de l'énergie dans le condensateur : $W_C = \frac{1}{2}Cu_C^2(+\infty) - \frac{1}{2}Cu_C^2(0) = +\frac{1}{2}CE^2$

Sachant que $dq(t) = i(t)\,dt = \dot{q}(t)\,dt$. L'énergie fournie par le générateur s'écrit :

$W_G =$

Le générateur perd de l'énergie pendant la charge du condensateur. Exactement ………………… de son énergie sert à la charge du condensateur et on peut en déduire avec la conservation de l'énergie que …………………………… est dissipée par effet Joule :

$$W_G = W_R + W_L + W_C \text{ donc } W_R =$$

C . Temps de réponse, durée du régime transitoire

Quel que soit le régime transitoire, les solutions se mettent toutes sous la forme $e^{-\lambda\omega_0 t} f(t)$ $+CE$ en présence d'un générateur continue donc on les met sous la forme $e^{-t/\tau} f(t)$.

où τ est le **temps de relaxation** du circuit RLC tel que $\boxed{\tau = \quad}$

Par analogie aux régimes transitoires du 1er ordre, on peut considérer que le régime permanent est atteint pour une **durée de** 5τ même si l'expression de τ est différente.

Récapitulatif des régimes transitoires vus dans le chapitre III et IV :

circuit		équation électrique	bilan énergétique
RC	libre	$\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{RC} u_C(t) = 0$	
	forcé		$W_R + W_C = W_G$
RL	libre	$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L} i(t) = 0$	
	forcé		$W_R + W_L = W_G$
LC	libre	$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} q(t) = 0$	
RLC	libre	$\frac{d^2q(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dq(t)}{dt} + \frac{1}{LC} q(t) = 0$	$W_R + W_L + W_C = 0$
	forcé		

III . Régime sinusoïdal forcé

Dans le cas général où le générateur impose une tension variable $e(t)$, l'équation différentielle en **régime forcé** dans le cas du circuit RLC va s'écrire :

……+…………+……=…………

On peut comprendre que le régime transitoire peut être compliqué à étudier.
C'est pourquoi on ne s'intéresse qu'au régime **permanent** dans le cas de régimes **………**

Hyp. 1 : Le régime est supposé permanent : on se place à ………

La solution reste la somme d'une solution homogène et d'une solution particulière.
En $t > 5\tau$, la solution homogène $e^{-\cdots/\cdots}f(t)$ est négligeable, il reste la solution particulière.

Hyp. 2 : La tension imposée par le générateur est sinusoïdale : ……………………

⚠ Dans cette partie, ω n'a rien à voir avec la pseudo-pulsation : $\omega \neq \omega_0\sqrt{1-\lambda^2}$ ⚠

Comme une solution particulière est de la forme du 2nd membre, toutes les tensions, intensités, charges vont s'écrire sous la forme du 2nd membre donc de la tension imposée :

$u(t) =$ $\qquad\qquad$ $q(t) =$ $\qquad\qquad$ $i(t) =$

avec ω la pulsation **imposée** par le générateur et $Q, U, I, \varphi_q, \varphi_u, \varphi_i$ des constantes dépendant de l'équation différentielle et de la tension aux bornes du générateur.

A . Impédances complexes

1 . Notation complexe

Comme les cosinus et sinus sont des fonctions difficiles à manipuler, on utilise la notation complexe avec $j^2 = -1$ qui utilise des exponentielles plus faciles à exploiter.

Les complexes sont des nombres sous la forme $\underline{z} = a + jb$ où $\mathrm{Re}(\underline{z}) = a$ et $\boxed{\quad = \ldots}$ ⚠

Ils peuvent s'écrire aussi $\underline{z} = |\underline{z}|e^{j\varphi}$ où $e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi$ avec $a = \ldots\ldots\ldots\ldots$, $b = \ldots\ldots\ldots\ldots$

Par ailleurs, $|\underline{z}| = \sqrt{\qquad}$ est le **module** et $\tan\varphi = \dfrac{b}{a}$ où $\boxed{\varphi = \arg(\underline{z})}$ est **l'argument** de $\underline{z}$.

Si $a > 0$ alors $\varphi =$ $\qquad\qquad$ Si $a < 0$ alors $\varphi =$ $\qquad\qquad$ (très utile)

Une tension **complexe** peut s'écrire : $\underline{u}(t) =$

	tension	**charge**	**intensité**
partie réelle de $\underline{u}$	$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u)$	$q(t) = Q\cos(\omega t + \varphi_q)$	
notation complexe	$\underline{u}(t) = Ue^{j(\omega t + \varphi_u)} = \underline{U}e^{j\omega t}$		
amplitude complexe	$\underline{U} =$		
module	$\lvert\underline{u}\rvert = \lvert\underline{U}\rvert = \ldots\ldots$		
argument	$\arg(\underline{U}) = \ldots\ldots$		

Soit 2 complexes : $\underline{Z_1} = Z_1 e^{j\varphi_1}$ et $\underline{Z_2} = Z_2 e^{j\varphi_2}$

➢ *Addition de complexe :*

Soit le complexe résultant : $\underline{Z} = \underline{Z_1} + \underline{Z_2} = Ze^{j\varphi}$

⚠ $Z =$ ⚠

$$\varphi = \arg\left(\underline{Z_1} + \underline{Z_2}\right) \neq \arg\left(\underline{Z_1}\right) + \arg\left(\underline{Z_2}\right)$$

Pour déterminer le module et l'argument de l'amplitude complexe résultante, on pourra utiliser la formule de Fresnel :

$$Z = \sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + 2Z_1Z_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \text{ et } \varphi = \arcsin\left(\frac{Z_1\sin(\varphi_1) + Z_2\sin(\varphi_2)}{\sqrt{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_1Z_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}\right)$$

➢ *Rapport de complexes :*

Si $\underline{Z} = \frac{\underline{Z_1}}{\underline{Z_2}} = Ze^{j\varphi}$ alors $\underline{Z} = \frac{Z_1 e^{j\varphi_1}}{Z_2 e^{j\varphi_2}} = \frac{Z_1}{Z_2} e^{j(\ldots\ldots\ldots)}$ donc $Z = \frac{\ldots}{\ldots}$ et $\boxed{\varphi = \arg\left(\underline{Z}\right) = \qquad\qquad}$

➢ *Inverse d'un complexe : cas particulier d'un rapport de complexes où* $\underline{Z_1} = 1$

Soit un complexe $\underline{Z} = |\underline{Z}| e^{j\varphi} = a + jb$, l'inverse s'écrit : $\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{|\underline{Z}|} e^{\ldots\ldots}$

Or $\frac{1}{\underline{Z}} = \left|\frac{1}{\underline{Z}}\right| e^{j\arg\left(\frac{1}{\underline{Z}}\right)}$ donc $\boxed{\left|\frac{1}{\underline{Z}}\right| = \qquad\qquad}$ et $\boxed{\arg\left(\frac{1}{\underline{Z}}\right) = \ldots\ldots = \begin{cases} & \text{si } a > 0 \\ & \text{si } a < 0 \end{cases}}$

Tout composant passif (R, L, C, etc…) d'un circuit possède une impédance $\underline{Z}$ telle que :

$$\boxed{\underline{U} = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Une impédance apparaît en notation complexe comme "l'équivalent d'une résistance".

En convention récepteur, une résistance a pour tension : $u_R(t) = Ri(t)$

En notation complexe :

On simplifie par $e^{j\omega t}$:

Un résistor a donc une impédance $\underline{Z_R}$ tel que d'où : $\boxed{\underline{Z_R} = \ldots}$ (réelle)

Salviati : Avec les hypothèses 1 et 2, toutes les grandeurs en notation complexe auront un terme $e^{j\omega t}$ que l'on pourra mettre en facteur puis simplifier dans la plupart des calculs.

2 . Impédance complexe de L et dérivation

En convention récepteur, une bobine a pour tension : $u_L(t) = L\dfrac{di(t)}{dt}$

En notation complexe :

La dérivation n'a pas d'influence sur le passage réel/complexe car c'est une généralisation.

Pour revenir au réel, il suffit de prendre la partie réelle :

On dérive $e^{j\omega t}$ puis on simplifie :

Une bobine a une impédance complexe $\underline{Z_L}$ tel que d'où :

$$\boxed{\underline{Z_L} = \qquad\qquad}$$ (imaginaire pur)

$\dfrac{d\underline{i}(t)}{dt} = j\omega\,\underline{i}(t)$ donc **dériver** en notation complexe revient à **............................**

i.e. ....

3 . Impédance complexe de C et intégration

En convention récepteur, un condensateur a pour charge : $q(t) = \ldots\ldots\ldots\ldots$

En dérivant par rapport au temps : $i(t) =$

En notation complexe : $\underline{i}(t) =$

On dérive $e^{j\omega t}$ puis on simplifie : $\underline{I}e^{j\omega t} =$

Un condensateur a une impédance complexe $\underline{Z_C}$ tel que d'où :

$$\boxed{\underline{Z_C} = \qquad\qquad}$$ (imaginaire pur)

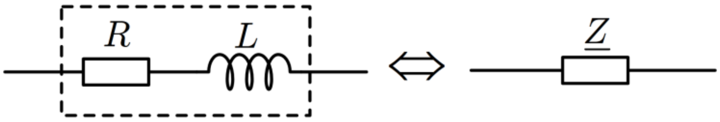
$\underline{u_C}(t) = \dfrac{1}{j\omega}\dfrac{d\underline{u_C}(t)}{dt}$ donc **intégrer** en notation complexe revient à **............................**

i.e. ....

4 . Association de 2 impédances complexes

Toutes les lois électriques restent vraies en notation complexe : loi des …………, loi des …………, ……………………………, pont diviseur de courant, représentation de Thévenin, association de 2 impédances en série ou en parallèle : voir chapitre III page 9 et 10.

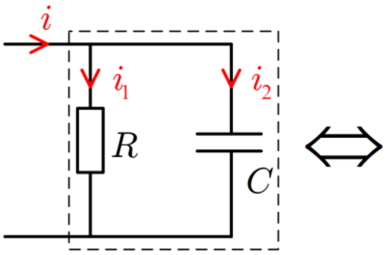
Soit $\underline{Z}$ l'**impédance équivalente**.

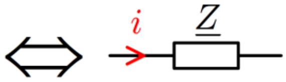


➤ *Association de 2 impédances en série*

$\underline{Z} =$ donc $Z = |\underline{Z}| = \sqrt{\qquad}$ et $\arg(\underline{Z}) =$

➤ *Association de 2 impédances en parallèle :* $Z = R \,//\, C$





donc $\underline{Z} = \dfrac{\dots}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}$

@ **Simplicius** On veillera à mettre au même dénominateur avant de passer à l'inverse.

D'où $|\underline{Z}| = \dfrac{\dots}{\qquad\qquad}$ et $\arg(\underline{Z}) =$ car $a = 1 > 0$

B . Résonance en intensité

Vidéos : Scarywaves.mp4, Casser un verre avec du son.mp4

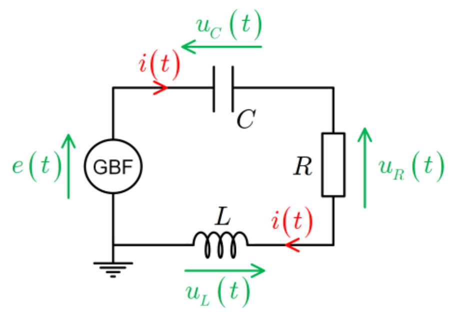
Quelques exemples de systèmes en résonance :

système en régime forcé	**système émettant une excitation**
pont suspendu	
verre en cristal	
balançoire	
masse-ressort	
circuit RLC	

Il y a résonance pour une grandeur $i(\omega)$ ………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

On considère un circuit RLC en régime permanent soumis à une source de tension sinusoïdale de pulsation ω de force électromotrice $e(t) = E\cos(\omega t)$.



Cette tension est choisie comme origine des phases $\varphi_e = 0$.

Et on aura donc $\underline{E} = Ee^{j\varphi_e} = E > 0$.

Objectif : Etudier les amplitudes complexes de l'intensité en fonction de ω.

1 . Expression de l'intensité

L'intensité du courant s'écrit $i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$. Son amplitude complexe vaut $\underline{I} =$

L'impédance équivalente au circuit s'écrit : $\underline{Z} =$

La loi des mailles (sens horaire) donne : ………………. d'où $\underline{E} = \ldots\ldots\ldots$

Donc $\underline{I} =$ car $\frac{1}{j} = -\ldots$

On introduit des expressions réelles :

- $I_{max} = \frac{\ldots}{\ldots}$ **l'intensité maximale** que peut atteindre l'intensité.
- $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{\ldots\ldots}}$ la **pulsation propre** du circuit RLC.
- $Q = \frac{\ldots\ldots}{\ldots} = \frac{\ldots}{\ldots\ldots\ldots}$ le **facteur de qualité** du circuit RLC.
- $x = \frac{\ldots}{\ldots}$ la **……………………………..** du système.

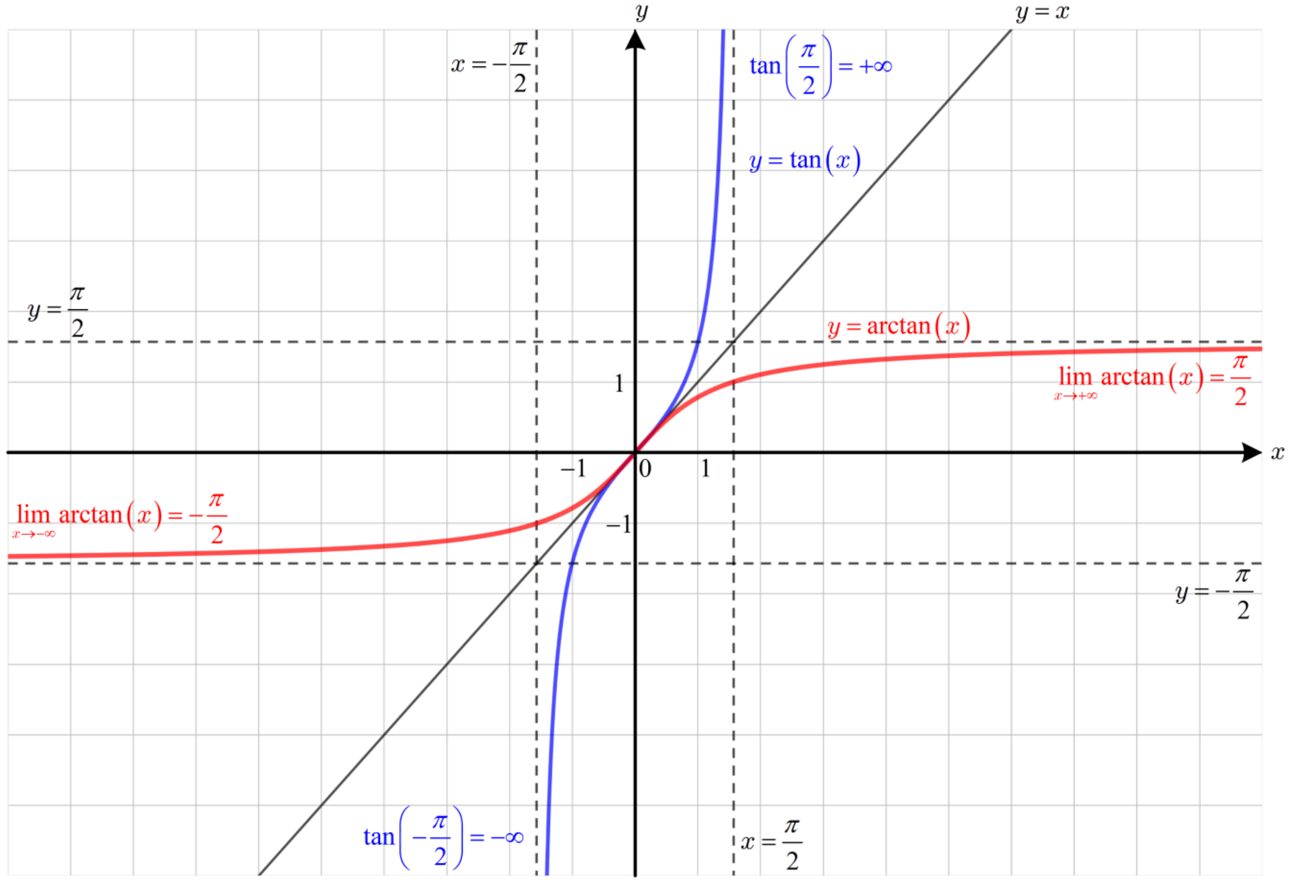
En combinant les relations : $\frac{L\omega}{R} =$ et $\frac{1}{RC\omega} =$

L'expression de l'amplitude complexe de l'intensité s'écrit alors : $\boxed{\underline{I} = \frac{I_{max}}{\qquad}}$

2 . Phase de l'intensité

La phase de l'intensité s'écrit $\varphi_i = \arg(\underline{I}) =$

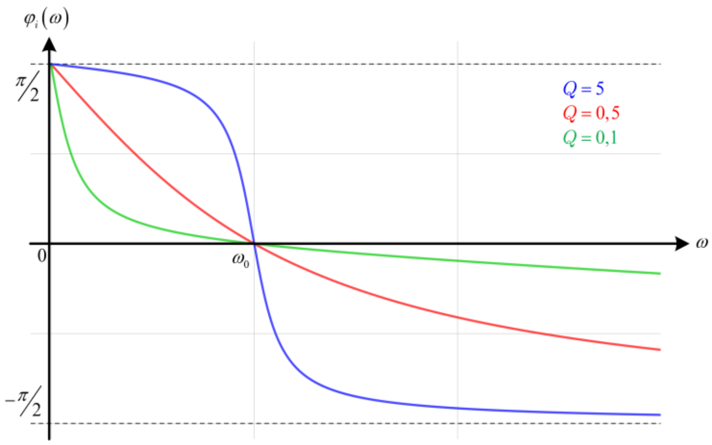
Or la partie réelle est 1 donc $\boxed{}$ $(a + jb, a > 0 \Rightarrow \theta = \arctan\left(\frac{b}{a}\right))$



- Pour $\omega \to 0$, $x \to 0$, $\varphi_i \to$
- Pour $\omega = \omega_0$, $x = 1$, $\varphi_i =$
- Pour $\omega \to +\infty$, $x \to +\infty$, $\varphi_i \to$

La phase décroît lorsqu'on augmente la pulsation ω.
On peut déterminer la pulsation de résonnance ω_r lorsque …………………
……………………………………………….
Plus la pulsation est proche de la pulsation de résonance, plus l'intensité et la tension imposée sont …………… :

$\varphi_i - \varphi_e \approx \ldots \quad \Leftrightarrow \quad \ldots\ldots = \ldots\ldots$



C'est d'autant plus vrai que le facteur de qualité est important.

3 . Amplitude de l'intensité

L'amplitude de l'intensité s'écrit $\left|\underline{I}\right| = I = \overline{\qquad\qquad\qquad}$

Pour $\omega \to 0$, $x \to 0$, $I = ...$ Pour $\omega = \omega_0$, $x = 1$, $I = ...$ Pour $\omega \to +\infty$, $x \to +\infty$, $I = ...$

On observe le phénomène de résonance lorsque le facteur de qualité Q est suffisant *i.e.* lorsque l'amortissement λ est relativement faible donc la résistance R ....

On définit les **pulsations de coupure** ω_c telles que (valeur efficace).

- Graphiquement, on cherche les abscisses ω qui correspondent à ....../......
- $I(x) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow$

…

…

On obtient … solutions pour l'équation mais $x=\dfrac{\omega_c}{\omega_0}>0$ et $\sqrt{4Q^2+1}>1$ donc il reste :

$x=\dfrac{\omega_c}{\omega_0}=$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\omega_{c1}= \qquad}$ et $\boxed{\omega_{c2}= \qquad}$

Les 2 pulsations de coupure forment un intervalle de pulsation $[\omega_{c1},\omega_{c2}]$ sur lequel toutes les pulsations vérifient $I\geq\dfrac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$. C'est cet intervalle qu'on appelle ……………………………

La ………………………… se résume à $\Delta\omega=\omega_{c2}-\omega_{c1}$. Les termes en racines se simplifient :

$\Delta\omega=$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\Delta\omega= \qquad}$

A partir du graphique de la phase φ, on peut en déduire la pulsation propre ω_0.
A partir du graphique de l'amplitude I, on peut en déduire les pulsations de coupure ω_c.

Graphiquement, connaissant ω_0, ω_{c1} et ω_{c2}, on peut en déduire $Q=\dfrac{\ldots\ldots}{\ldots\ldots-\ldots\ldots}$.

Salviati : Le titre de ce B. s'appelle résonance en intensité car lorsqu'on étudie la tension aux bornes du condensateur u ou la charge du condensateur q, les calculs sont différents et la résonance en tension ou en charge n'a pas lieu à la pulsation propre mais en :

$\omega_r=\omega_0\sqrt{1-2\lambda^2}$ (pulsation de résonance en tension ou en charge, voir TD5)

Table des matières