

# Chapitre VII

## Mécanique des solides

D'après le cours de thermodynamique, on peut modéliser la plupart des solides et des liquides par une **phase** ..... **et** ..... *i.e.* le volume reste constant par variation de pression et de température. C'est le point de départ de ce chapitre. L'objectif est d'étudier la mécanique du solide dans un référentiel galiléen, les causes et conséquences des mouvements des solides en rotation **autour d'un axe** .....

📖 Relire le chapitre II, III et surtout V Mouvements de rotation 📖

**Grandeurs physiques :**

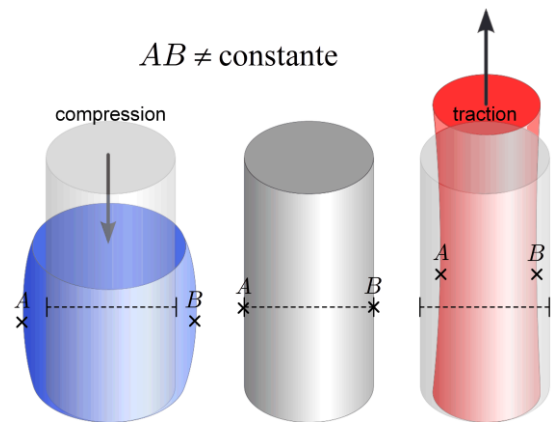
Grandeur physique	Symbole	Unité du S.I.	Dimension
moment d'inertie			$ML^2$
couple de force		.....(.....)	$ML^2T^{-2}$

Il a été vu en chimie que les liquides n'ont pas de forme, ils sont facilement déformables.

Quant aux solides, ils sont aussi tous déformables à des échelles de **1 à 100 µm** pour des objets usuels.

Un solide peut être vu comme une .....  
pouvant se déplacer les uns par rapport aux autres.

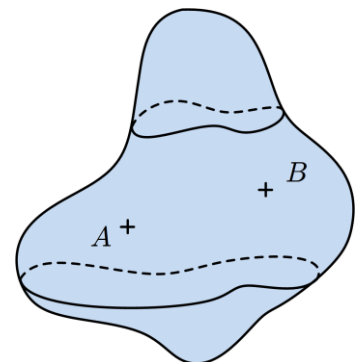
L'étude des déformations relève du domaine de la **mécanique des** ..... qui dépasse le cadre de ce cours.



### I. Cinématique du solide

On définit un solide **indéformable**  $S$  comme un système mécanique pour lequel 2 points quelconques  $A$  et  $B$  de  $S$  sont tels que la distance  $AB$  qui les sépare soit .....

$$\forall A, B \in (S),$$

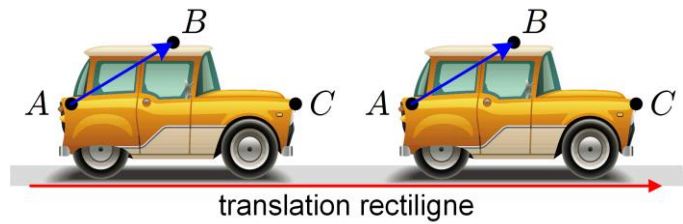


#### A. Translation d'un solide

Un solide indéformable  $S$  est en ..... lorsque  $\forall A, B \in (S),$  .

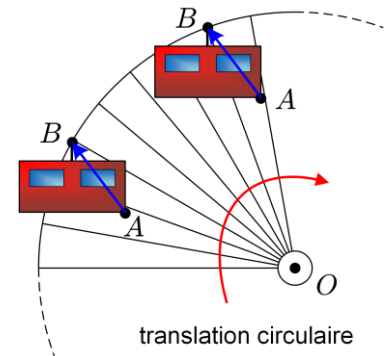
### 1. Exemples classiques

Soit une voiture en mouvement, chaque point de la carrosserie de la voiture se déplace selon un mouvement ..... donc la carrosserie subit une ..... puisqu'à tout instant :



$$\vec{AB} = \vec{cste}, \vec{BC} = \vec{cste}, \text{ etc...}$$

Soit une cabine en mouvement sur une grande roue, chaque point de cabine se déplace selon un mouvement ..... donc la cabine subit une ..... puisqu'à tout instant :  $\vec{AB} = \vec{cste}$ . Ce n'est .....



[http://physique.ostralo.net/mvt\\_translation\\_rotation/](http://physique.ostralo.net/mvt_translation_rotation/)

Parmi ces exemples interactifs, on peut observer que le ..... et la ..... sont en translation, **curviligne** pour l'un, **circulaire** pour l'autre car chacun de leurs points décrit exactement la même trajectoire. Pour la grande roue, chaque point de la cabine décrit un **cercle de même** ..... donc une trajectoire identique mais de ..... différent, donc translaté d'un vecteur défini par les deux points considérés.

### 2. Vecteurs du mouvement

Soit un repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  où l'origine  $O$  est associée à un référentiel terrestre supposé galiléen  $R$ . Les points sont repérés par leurs vecteurs-positions :

$$\vec{OA} = x_A \vec{e}_x + y_A \vec{e}_y + z_A \vec{e}_z \text{ et } \vec{OB} = x_B \vec{e}_x + y_B \vec{e}_y + z_B \vec{e}_z .$$

Pour un solide en translation,  $\vec{AB} =$

Le point  $B$  suit bien la même trajectoire que  $A$  mais .....

De ce fait,  $\vec{v}(B) = \frac{d\vec{OB}}{dt} =$  car  $\frac{d\vec{AB}}{dt} = \vec{0}$  et de même,  $\vec{a}(B) =$

Les vitesses et les accélérations de tous les points d'un solide **en translation** sont rigoureusement ..... donc ..... à décrire entièrement la translation d'un solide. C'est pour cette raison qu'on ramène l'étude d'un solide en translation à un seul point appelé ..... qui est en général son centre de gravité  $G$  défini par :

$$\vec{OG} = \text{(chapitre I page 3)}$$

avec  $M = \sum_i m_i$  la masse totale du solide avec une infinité de points  $M_i$  de masse  $m_i$

En dérivant, on trouve  $\vec{v}(G) = \frac{d\vec{OG}}{dt} =$  avec  $m_i = cste, \forall M_i$ .

Puisque , en factorisant :  $\vec{v}(G) =$  ,  $\forall M_i$ .

Il en sera de même pour l'accélération :  $\vec{a}(G) =$  ,  $\forall M_i$

## B. Rotation d'un solide

[http://physique.oztralo.net/mvt\\_translation\\_rotation/](http://physique.oztralo.net/mvt_translation_rotation/)

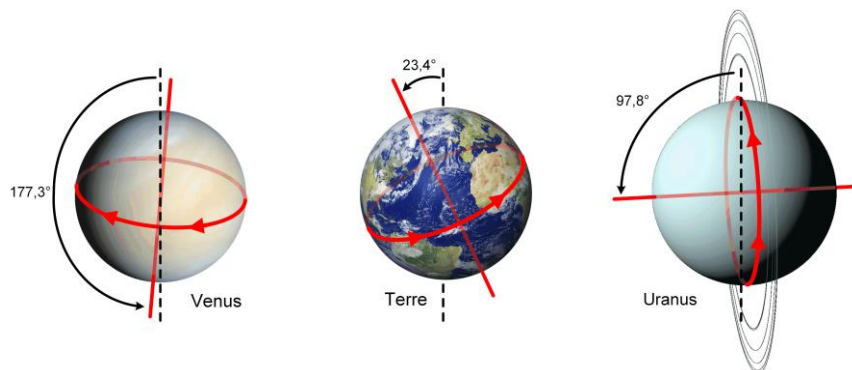
Parmi ces exemples interactifs, la ..... est un solide indéformable en ..... **autour d'un axe** ..... Tous les points du solide décrivent un **mouvement** ..... autour de l'axe de rotation, qui est ..... à la barrière et passant par .....

L'axe de rotation peut être :

- ..... comme pour la barrière automatique, les portes, etc...
- ..... comme le pendule simple, les pédales d'un vélo, etc...
- ..... *i.e.* passant en général par le centre de gravité.

Lorsqu'il est "centré", c'est souvent aussi un ..... du solide, c'est le cas pour tous les **astres** : étoiles, planètes, satellites qui possèdent donc un axe de rotation.


On dit notamment que les planètes tournent ..... car tous les points qui les composent tournent autour d'un axe de rotation qui passe par le centre de la planète :



*Il s'agit de l'angle entre l'axe de rotation et la droite orthogonal à l'écliptique*

Comparaison entre translation circulaire et rotation pour 2 points A et B du solide :

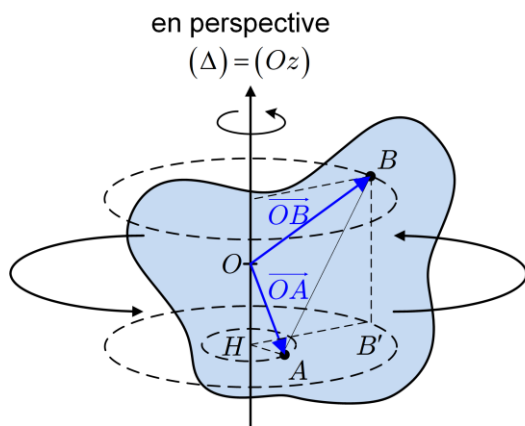
	translation circulaire	rotation autour d'un axe
mouvement, trajectoire	circulaire, cercle	
rayon de la trajectoire		
centre de la trajectoire		
vecteur entre les points	$\vec{AB} = cste$	

 **Culture scientifique :**

Le mouvement d'un point de la surface terrestre est le mouvement composé d'une rotation de la Terre sur elle-même et d'une translation quasi-circulaire appelée .....

La révolution de la Terre est bien une translation car l'axe de rotation de la Terre ne tourne pas (schéma chapitre VI page 8) et pointe toujours vers la même étoile polaire appartenant à la constellation de la Petite Ourse. Compte tenu des angles d'inclinaison des axes des planètes, on dit que Vénus "glisse" sur son orbite alors qu'Uranus "roule" sur son orbite.

Soit un solide quelconque tournant autour d'un axe de rotation  $\Delta$  **fixe**, il est souvent possible de faire coïncider l'axe  $Oz$  avec l'axe  $\Delta$  de façon à utiliser les coordonnées ..... pour que le mouvement soit plus facile à étudier :  $(\Delta) = (Oz)$ .



Chaque point décrit un **cercle** dont le centre est situé sur l'axe  $\Delta$  mais de rayon .....

Le point  $A$  est à une distance  $r_A$  constante de l'axe et le point  $B$  à une distance  $r_B$ .

On appelle  $H$  le projeté de  $A$  sur  $Oz$  :  $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HA} = z_A \vec{e}_z + r_A \vec{e}_r$ , on définit les vecteurs de la base par rapport à  $A$  qui est un point du solide parmi tous les points  $M$  du solide.

D'où  $\vec{v}_R(A) = r_A \dot{\theta} \vec{e}_\theta$  car  $r_A, z_A = cstes$  (vitesse orthoradiale)

Dans le plan orthogonal à  $(\Delta)$  et passant par  $H$  et par  $A$ , soit  $B'$  le projeté de  $B$ .

$OA = cste = r_A$ ,  $OB' = cste = r_B$  et puisque le solide est .....,  $AB' = cste$ , donc le triangle  $AHB'$  reste le même au cours de la rotation donc ses angles aussi. En particulier, l'angle  $\theta_B - \theta_A$  reste constant :  $\theta_B - \theta_A = cste \Leftrightarrow$

**La vitesse angulaire  $\omega(t)$  est .....**

Attention, la vitesse de rotation  $\omega$  est quelconque et .....

$\forall M \in S, \vec{v}(M) =$   $\vec{\omega} \wedge \vec{OM}$   $avec  $\vec{\omega} = \omega(t) \vec{e}_\Delta$  (chapitre V page 10)$

où  $R$  est la distance du point  $M$  du solide à l'axe de rotation *i.e.* le rayon de la trajectoire

### C . Moments appliqués au solide

Rappels sur les sommes :  $\sum_{i=1}^n 1 = \dots$ ,  $\sum_{i=1}^n 2 = \dots$ ,  $\sum_{i=0}^n 1 = \dots$ ,  $\sum_{i=0}^n i = 1 + 2 + \dots + n =$

$$\sum_{i=0}^n 2i = 2 \sum_{i=0}^n i = \dots, \quad \sum_{l=0}^n 2l + 1 =$$

$$\frac{d}{dt} \sum_i \vec{v}_i = \quad \text{et} \quad \sum_i \vec{u} \cdot \vec{v}_i = \quad \text{pour un vecteur constant } \vec{u} .$$

#### 1 . Moment cinétique

Pour le système {Terre-Lune}, on a vu chapitre II page 2 :  $\vec{p} = m_{tot} \vec{v}(G) = m_T \vec{v}(T) + m_L \vec{v}(L)$

On définit alors le moment cinétique comme :  $\vec{L}_O =$

Pour un ensemble de points de centre de gravité  $G$ , on a vu aussi chapitre II page 2 :

$$\vec{p} = \vec{p}(G) = m \vec{v}(G) = \sum_i m_i \vec{v}(M_i) = \sum_i \vec{p}(M_i)$$

On définit le moment cinétique par rapport au point  $O$  pour une infinité de points  $M_i$  :

$$\vec{L}_O =$$

Cette expression est valable pour n'importe quel point  $O$  appartenant ou non au solide.

Le moment cinétique d'un solide ( $S$ ) au point  $A$  :  $\vec{L}_A =$  . Et au point  $B$  :

$$\vec{L}_B = \quad \quad \quad \text{(relation de Chasles)}$$

=

➤ Analogie pour 2 points A et B quelconques d'un solide (chapitre V page 10) :

vecteur-vitesse <b>d'un point A</b> : $\vec{v}(A) = \frac{d\vec{OA}}{dt} =$	moment cinétique <b>du solide</b> en A : $\vec{L}_A =$
vecteur-rotation $\vec{\omega}$	quantité de mouvement <b>total</b> $\vec{p}$
$\vec{v}(B) = \vec{v}(\dots) +$ torseur cinématique	$\vec{L}_B = \vec{L}_{\dots} +$ torseur cinétique

La projection du moment selon l'axe de rotation  $\Delta$  du solide est telle que :

$$L_{\Delta} =$$

Moment cinétique du solide par rapport à l'axe  $\Delta$  (produit mixte)

Salviati :  $\vec{L}_O$  et  $L_{\Delta}$  sont les moments cinétiques vectoriel et scalaire d'un **solide** alors qu'on avait vu jusqu'à présent les moments d'un **point**  $M$  :  $\vec{L}_O(M)$  et  $L_{\Delta}(M)$ .

## 2. Moment d'inertie

$$L_{\Delta} = \vec{L}_O \cdot \vec{e}_{\Delta} = \left( \sum_i \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i) \right) \cdot \vec{e}_{\Delta} = \sum_i \left( \vec{e}_{\Delta} \cdot \left( \vec{OM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i) \right) \right) \text{ car } \vec{e}_{\Delta} \text{ ne dépend pas de } i.$$

C'est une somme de **produits** ..... *i.e.* une somme de produits scalaires d'un produit vectoriel avec le vecteur  $\vec{e}_{\Delta}$ . La grandeur  $L_{\Delta}$  est donc un **scalaire** *i.e.* juste un .....

Par permutation circulaire du produit mixte : 
$$L_{\Delta} = \sum_i \left( m_i \vec{v}(M_i) \cdot \left( \vec{e}_{\Delta} \wedge \vec{OM}_i \right) \right)$$

Or pour un solide quelconque ( $S$ ), les points  $M_i$  sont telles que  $\vec{v}(M_i) = \vec{v}(O) + \vec{\omega} \wedge \vec{OM}_i$

$O$  étant un point fixe sur l'axe,  $\vec{v}(O) = \vec{0} \Rightarrow \vec{v}(M_i) = \vec{\omega} \wedge \vec{OM}_i = \omega \vec{e}_{\Delta} \wedge \vec{OM}_i$  donc :

$$L_{\Delta} = \sum_i \left( m_i \omega \left( \vec{e}_{\Delta} \wedge \vec{OM}_i \right) \cdot \left( \vec{e}_{\Delta} \wedge \vec{OM}_i \right) \right) = \omega \sum_i m_i \left\| \vec{e}_{\Delta} \wedge \vec{OM}_i \right\|^2$$

La vitesse angulaire de rotation  $\omega$  autour de l'axe  $\Delta$  ne dépend pas de la répartition en masse des points  $M_i$  du solide même si elle peut dépendre du temps :  $\omega = \dot{\theta} \neq cste$ .

Soit  $H_i$  le projeté du point  $M_i$  sur la droite  $(\Delta)$ .

Si l'axe  $(\Delta)$  ne se déplace pas alors le point  $M_i$  décrit un cercle de rayon  $r_i = H_i M_i$  de centre  $H_i$ .

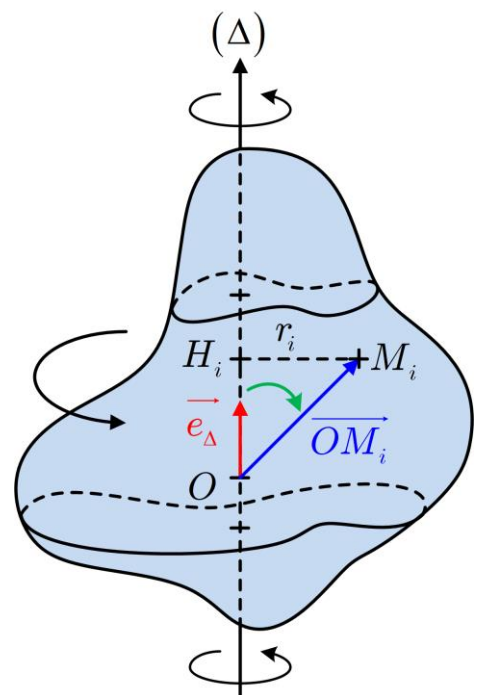
La norme du vecteur  $\vec{e}_{\Delta} \wedge \vec{OM}_i$  est une .....

Par définition du produit vectoriel :

$$\left\| \vec{e}_{\Delta} \wedge \vec{OM}_i \right\| = \underbrace{\left\| \vec{e}_{\Delta} \right\|}_{=1} \times \underbrace{\left\| \vec{OM}_i \right\| \times \left| \sin(\vec{e}_{\Delta}, \vec{OM}_i) \right|}_{=H_i M_i} = H_i M_i \text{ d'où :}$$

$$L_{\Delta} = \omega \sum_i m_i \left\| \vec{e}_{\Delta} \wedge \vec{OM}_i \right\|^2 = \omega \sum_i m_i (H_i M_i)^2 \Leftrightarrow$$

On définit donc le **moment d'inertie** comme la somme des masses en chaque point du solide multiplié par la distance  $r_i$  au carré des points à l'axe :



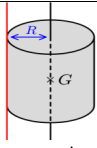
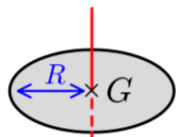
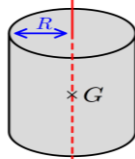
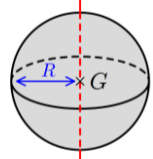
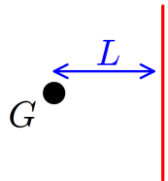
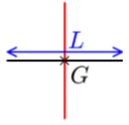
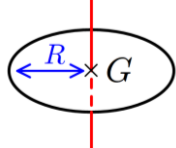
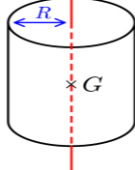
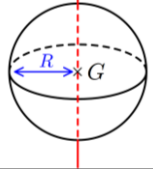
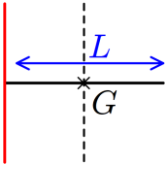
$J_{\Delta} =$	(moment d'inertie en kg.m <sup>2</sup> )
----------------	--

Le moment d'inertie est donc une grandeur physique ..... qui tient compte de sa géométrie, de sa répartition de masse mais qui est aussi une ..... pour un solide indéformable dans un référentiel galiléen.

### 3. Valeurs usuelles

**Classer les solides suivants dans l'ordre croissant des moments d'inerte.**

Pour le classement, on prendra une longueur caractéristique de la distribution de masse  $L = R$ . Les zones grisées signifient que le solide est **plein** en volume (plein de matière...), les zones blanches signifient que le solide est **creux** en volume.

 $J_{\max} = \frac{3}{2}mR^2$				
 $J_{\min} = \frac{1}{12}mL^2$				

Coller les moments d'inertie ici

Plus la répartition de masse est ....., plus le moment  $J_\Delta$  est .....

Le moment  $J_\Delta$  .....

**4. Théorème de König-Huygens**

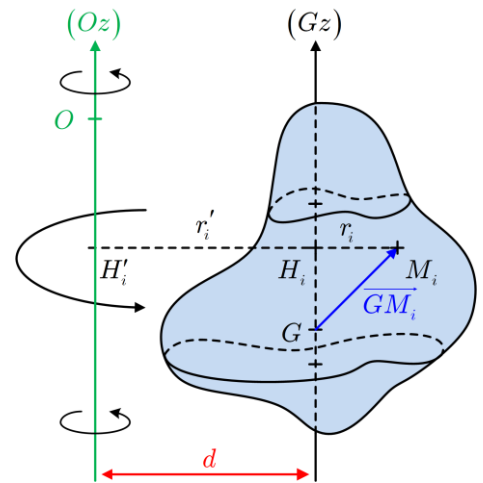
Christian Huygens, 1629-1695, physicien hollandais :

<http://fr.forvo.com/word/huygens/#nl>

Très souvent, les valeurs de référence sont données par rapport à l'axe de symétrie du solide *i.e.* l'axe passant par le centre de gravité  $G$ , qu'on appellera  $Gz$ .

Par exemple, pour la sphère pleine :  $J_{Gz} =$

où  $R$  le rayon de la sphère et  $m$  la masse de la sphère



**Objectif :** Déterminer le moment d'inertie  $J_{Oz}$  par rapport à un axe de rotation  $Az$  quelconque à une distance  $d$  de  $Gz$  et passant par un point  $O$  en fonction de  $J_{Gz}$ .

Par définition et d'après le schéma :  $J_{Oz} = \sum_i m_i r_i'^2 = \sum_i m_i (H_i' M_i)^2 = \sum_i m_i (\overline{H_i' M_i})^2$

On utilise l'identité remarquable vectorielle  $(\vec{u} + \vec{v})^2 =$  :

$$J_{Oz} = \sum_i m_i (\overline{H_i' H_i} + \overline{H_i M_i})^2 = \sum_i m_i (\overline{H_i' H_i})^2 + 2 \sum_i m_i \overline{H_i' H_i} \cdot \overline{H_i M_i} + \underbrace{\sum_i m_i (\overline{H_i M_i})^2}_{\dots\dots}$$

Or  $\forall i, (\overline{H_i' H_i})^2 = \|\overline{H_i' H_i}\|^2 = \dots^2$ . **@Simplicius** Ne pas confondre  $d$  avec la distance  $OG$ .

Donc  $\sum_i m_i (\overline{H_i' H_i})^2 = \sum_i m_i d^2 = \left(\sum_i m_i\right) d^2 = m d^2$  où  $m$  est la masse totale du solide.

Par ailleurs,  $\sum_i m_i \overline{H_i' H_i} \cdot \overline{H_i M_i} = \sum_i m_i \overline{H_i' H_i} \cdot \overline{H_i G} + \sum_i m_i \overline{H_i' H_i} \cdot \overline{GM_i}$  (relation de Chasles)

$\forall i, \overline{H_i' H_i} \perp \overline{H_i G}$  donc  $\sum_i m_i \overline{H_i' H_i} \cdot \overline{H_i M_i} = 0 + \sum_i m_i \overline{H_i' H_i} \cdot \overline{GM_i} = \overline{H_i' H_i} \cdot \underbrace{\sum_i m_i \overline{GM_i}}_{=0} = 0$

**Salviati :** Le centre de gravité  $G$  ou centre de masse est le barycentre pondéré des masses. Le vecteur  $\overline{H_i' H_i}$  ne dépend pas des  $M_i$ , il se décale selon l'altitude du point  $M_i$  mais ne change ni de direction, ni de sens, ni de norme, c'est donc mathématiquement toujours le même vecteur indépendant de la somme sur les  $i$  d'où la factorisation par  $\overline{H_i' H_i}$ .

Finalement,  $J_{Oz} =$  (théorème de König-Huygens)

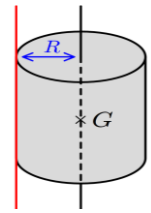
où  $m$  est la masse totale du solide et  $d$  la distance entre les axes passant par  $O$  et  $G$



➤ Exemples d'axe extérieur pour les géométries remarquables :

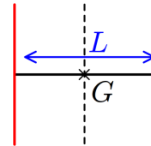
↳ Cylindre plein pour un axe passant par sa surface latérale :

$$J_{Oz} = J_{Gz} + md^2 =$$



↳ Fil pour un axe passant par une de ses extrémités :

$$J_{Oz} =$$



**Le moment d'inertie est une grandeur ..... et souvent .....**

## II . Dynamique du solide

Pour la plupart des solides en rotation autour d'un axe fixe :



(moment cinétique du solide)

Comme pour un point, on définit la loi **scalaire** du moment cinétique appliquée au solide en rotation autour d'un axe fixe orienté dans un référentiel galiléen :



(TMC par rapport à un axe  $\Delta$ )

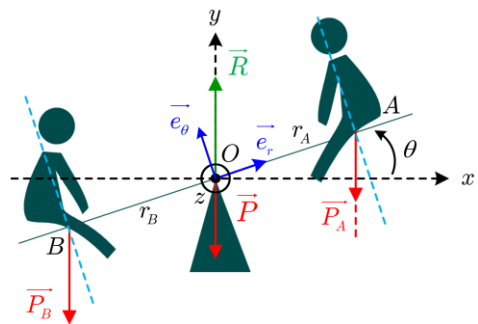
La relation est identique à un point matériel à la différence près que c'est le **solide dans son ensemble** que l'on considère comme système. Chaque moment de force est telle que :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}(S)) =$$

- $O$  est un point appartenant à l'axe de rotation ( $\Delta$ ),  $\vec{e}_\Delta$  un vecteur unitaire selon ( $\Delta$ )
- $M$  est le ..... de la force  $\vec{F}(M)$  sur le solide. Puisqu'il intervient dans les calculs, il est ..... en mécanique du solide lors du bilan des forces.

### A . La balançoire à bascule

Soit une balançoire à bascule assimilée à un solide indéformable ( $S$ ) de masse  $m$  à répartition homogène et symétrique par rapport à son axe de rotation  $Oz$ . Elle est soumise aux poids de 2 personnes  $A$  et  $B$  assimilées à des points de masses respectives  $m_A$  et  $m_B$ , respectivement à une distance  $r_A$  et  $r_B$  de l'axe de rotation. On néglige tout frottement.



➤ Le poids  $\vec{P}_A$  de la personne A est appliquée au point A et le poids  $\vec{P}_B$  de la personne B est appliquée au point B. D'après la p.12 du chapitre IV ou la p.3 du chapitre V :

$$\mathcal{M}_{O_z}(\vec{P}_A) = OA \times P_A \times \sin(\overline{OA}, \overline{P}_A) = \quad \text{car } (\overline{OA}, \overline{P}_A) < 0$$

$$\mathcal{M}_{O_z}(\vec{P}_B) = \quad \text{car } (\overline{OB}, \overline{P}_B) > 0$$

On aurait pu calculer les moments par rapport au point O et en déduire les  $\mathcal{M}_{O_z}$  :

$$\overline{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_A) = \overline{OA} \wedge \overline{P}_A =$$

$$\overline{\mathcal{M}}_O(\vec{P}_B) =$$

➤ Le poids de la balançoire  $\vec{P}$  et la réaction du support  $\vec{R}$  sont appliquées au point O :

$$\mathcal{M}_O(\vec{P}) = \overline{OO} \wedge \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{M}_{O_z}(\vec{P}) = 0, \quad \mathcal{M}_O(\vec{R}) = \overline{OO} \wedge \vec{R} = \vec{0} \Rightarrow \mathcal{M}_{O_z}(\vec{R}) = 0$$

*Salviati* : On remarque qu'en appliquant astucieusement la loi du moment cinétique ou TMC au solide par rapport au point O, la réaction du support disparaît naturellement.

On applique la loi du moment cinétique au solide (S) :

...

...

Cette équation est du ....., sans ..... mais elle n'est pas ..... à cause du cosinus. On ne peut pas la résoudre analytiquement.

En supposant qu'à  $t=0$ , la balançoire est à l'horizontale et immobile à l'état initial :

$$= 0 \text{ et } = 0$$

L'accélération angulaire **initiale** vaut

$$\ddot{\theta}(t=0) =$$



➤ Pour des personnes de même masse  $m_A = m_B$  et à une distance identique  $r_A = r_B$  :

$\ddot{\theta} = \dots \Rightarrow$  . La balançoire .....

➤ Pour des personnes de masse différente  $m_A \neq m_B$  mais à une distance identique :

$$r_A = r_B = r_0 \Rightarrow \ddot{\theta}(t=0) =$$

Si B est **plus lourd** que A alors  $\ddot{\theta}(0) > 0$  donc ...

Le mouvement est dans le sens ....., la balançoire .....

➤ Dans le cas quelconque où  $m_A \neq m_B$  et  $r_A \neq r_B$ , ce n'est pas forcément le plus lourd qui fait pencher la balançoire mais celui qui possède .....

Si  $B$  est plus lourd  $m_B = 2m_A$  mais plus près du centre  $r_A = 3r_B$  alors :

$$\ddot{\theta}(t=0) =$$

Le mouvement est dans le sens ....., la balançoire .....

En effet,  $\left| \mathcal{M}_{O_z}(\vec{P}_B) \right| =$

(chapitre V p.4)

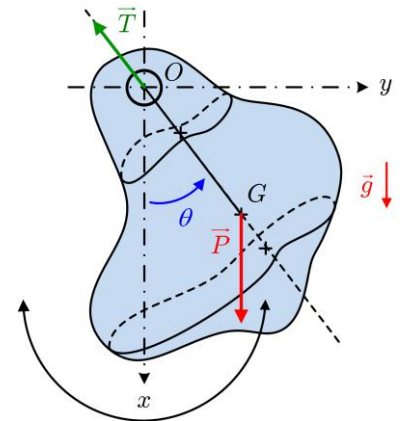
### B. Pendule pesant (1ère partie)

Soit un solide  $S$  de masse  $m$  attaché par l'un de ses points appelé  $O$  dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Le solide est lâché sans vitesse initiale depuis un angle  $\theta_0$ .

L'angle  $\theta$  est défini comme l'angle que fait l'axe vertical  $Ox$  avec la droite passant par  $O$  et le centre de gravité  $G$ .

La distance  $OG$  est notée  $L$ . On néglige tout frottement.



*Objectif* : Déterminer l'évolution de l'angle  $\theta(t)$  au cours du temps.

*Salvati* : L'axe de rotation est perpendiculaire au plan de la feuille contrairement aux figures précédentes comme celle pour le théorème de König-Huygens par exemple.

#### 1. Décrire le système

*Système* : .....

*Référentiel* : .....

*Repère* : .....  $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

*Bilan des forces et des moments* :

➤ Poids appliqué en  $G$  :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_x =$$

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{O} \dots \wedge$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_{O_z}(\vec{P}) = \vec{e}_z \cdot \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) =$$

➤ Tension du fil appliqué en  $O$  :

$$\vec{T} = \quad \text{avec } \|\vec{T}\| = +T > 0 \text{ donc } \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) = \vec{OO} \wedge \vec{T} = \dots \Rightarrow \mathcal{M}_{O_z}(\vec{T}) = \dots$$

## 2. Appliquer les lois physiques

On applique la loi du moment cinétique **scalaire** pour un solide :

...

On reconnaît une équation différentielle qui ressemble à celle du .....

En faisant l'approximation des petits angles à l'ordre 1 :  $\sin \theta \approx \theta$ , on trouve finalement :

avec  $\omega_0^2 = \frac{mgL}{J_{Oz}}$

Il s'agit de l'équation d'un .....

Avec les conditions initiales de l'énoncé :  $\theta(t=0) = \theta_0$ ,  $\dot{\theta}(t=0) = 0$  d'où :

$$\theta(t) = \dots \dots (\omega_0 t) + \dots \dots (\omega_0 t) \Rightarrow \theta(t) =$$

## 3. Comparer au pendule simple

La période de rotation du solide est donnée par :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\dots \dots}{\dots \dots}} \Rightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = \dots \dots \sqrt{\frac{\dots \dots}{\dots \dots}}$$

Pour une **horloge à balancier**, il suffit de régler la répartition de masse  $J_{Oz}$  ou la distance d'attache  $L$  du balancier pour faire en sorte que :

$$T_0 = 1 \text{ s} \text{ ou } T_0 = 2 \text{ s}$$



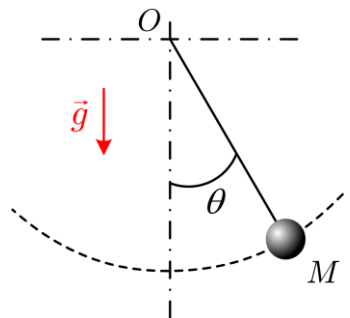
Plus  $J_{Oz}$  est grand, plus la période de rotation est ....., plus la rotation est .....

*Salviati* : La notion d'**inertie** prend tout son sens ici : plus la répartition de masse d'un objet est loin du centre de gravité, plus  $J_{Oz}$  est grand, plus il est difficile de le mettre en mouvement ou bien une fois qu'il est en mouvement, de l'arrêter.

➤ *Modélisation du pendule simple* :

On considère le solide comme un fil de longueur  $L$  de masse  $m_{fil}$  d'épaisseur nulle et une masse  $m$  sphérique pleine de rayon  $R$  :

Avec l'additivité du moment d'inertie :  $J_{Oz} =$



La masse étant à une distance  $L$ , on utilise le théorème de König-Huygens :

$$J_{masse} = \dots \dots \text{ où } J_{Gz} = \frac{2}{5} m R^2 \text{ pour une boule, d'où } J_{Oz} =$$

Les hypothèses d'assimilation du système au point  $M$  de masse  $m$  sont telles que :

$$m_{fil} \ll \dots, R \ll \dots \text{ d'où } J_{fil} \ll \dots \text{ et } J_{Gz} \ll \dots \text{ donc } \boxed{J_{Oz} \approx}$$

On a vu que la pulsation du pendule **pesant** valait :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgL}{J_{Oz}}}$ , avec le modèle :

$$\omega_0 \approx \sqrt{\frac{mgL}{mL^2}} = \sqrt{\frac{g}{L}} \text{ et } T_0 \approx 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{mgL}} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \text{ (chapitre II page 18)}$$

**Le pendule simple est un ..... pour lequel  $J_{Oz} \approx$**

### C . Couple de force

**Comment obtenir réellement une rotation autour d'un axe fixe ?**

Le système mécanique étudié ou solide ( $S$ ) choisi doit être en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen, il ne doit donc pas y avoir de mouvement de .....

La roue de vélo peut tourner selon un seul angle  $\theta$ , elle est bloquée aux extrémités empêchant les mouvements de translation ou de rotation supplémentaire. C'est une liaison solide qui restreint un système mécanique à une seule rotation autour d'un axe fixe qu'on appelle une .....



Le bonhomme de babyfoot peut se déplacer selon une direction  $x$  et peut tourner selon un seul angle  $\theta$ , c'est une liaison .....  
..... 2D qui ne correspond pas à ce qu'on cherche.



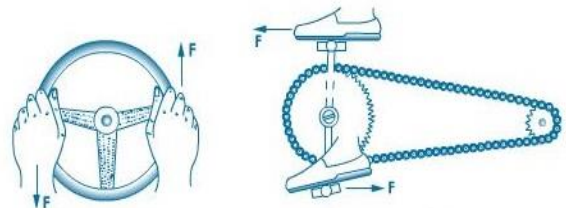
Il existe de multiples liaisons qui sont notamment vues en SII.

Par exemple, dans les roulements à bille, en combinant une liaison rotule et une liaison ponctuelle, on obtient une ..... Le contact avec les billes étant ponctuel, cela permet d'éviter les frottements entre solides.



Si la liaison pivot est **idéale** autour d'un axe  $\Delta$  alors toute translation selon l'axe  $\Delta$  est impossible. Le mouvement est **circulaire** pour tout point du solide en dehors de l'axe (chapitre V page 10).

Lorsqu'on tourne le volant d'une voiture ou qu'on tourne les pédales d'un vélo, on impose des forces ..... de part et d'autre du solide pour entraîner une rotation autour de l'axe.

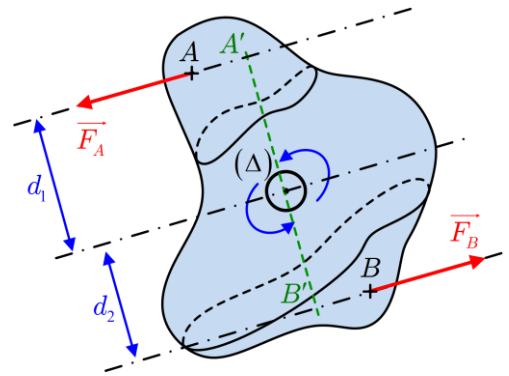


Soit un solide ( $S$ ) soumis à 2 forces  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  égales et opposées tels que  $\vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$ .

Ces 2 forces peuvent dépendre du temps pour faire tourner le solide ( $S$ ) autour d'un axe ( $\Delta$ ).

Soit  $O \in (\Delta)$  et au plan formé par les 2 forces.

Les points  $A'$  et  $B'$  sont les projetés de  $O$  sur les droites d'action portées par  $\vec{F}_A$  et  $\vec{F}_B$  de points d'application  $A$  et  $B$ . On note  $OA' = d_1$  et  $OB' = d_2$  les bras de levier et on note  $F$  la norme telle que  $\|\vec{F}_A\| = \|\vec{F}_B\| = F$ .



$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}_A) = \vec{OA} \wedge \vec{F}_A = \vec{OA'} \wedge \vec{F}_A + \vec{A'A} \wedge \vec{F}_A = \vec{OA'} \wedge \vec{F}_A \text{ car } \vec{A'A} \parallel \vec{F}_A.$$

Comme  $\vec{OA'} \perp (\Delta)$  et  $\vec{F}_A \perp (\Delta)$  alors  $\vec{OA'} \wedge \vec{F}_A$  est selon  $(\Delta)$  et donc :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_A) = \text{car } (\vec{OA'}, \vec{F}_A) = \pi/2, \text{ rotation anti-horaire}$$

$$\text{De même, on aura } \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_B) = \text{car } (\vec{OB'}, \vec{F}_B) = \pi/2$$

$$\text{D'où} \quad \text{alors que } \vec{F}_A + \vec{F}_B = \vec{0}$$

Bien que la somme des forces soit nulle à chaque instant, le moment des forces ..... ce qui entraîne un mouvement de rotation du solide sans translation autour de l'axe.

**Un couple de force est un ensemble de forces dont la résultante est .....  
 $\sum_{\text{forces}} \vec{F} = \vec{0}$  mais dont ..... tel que :  
 où  $\Gamma$  est appelé couple de force et s'exprime en N.m**

TMC :  $\frac{dL_\Delta}{dt} = \dots$  . S'il n'y a qu'un seul couple :  (TMC)

➤ Soit une rotation dans le **sens trigonométrique** autour de  $(\Delta)$  alors  $\theta \nearrow, \dot{\theta} > 0$  :

    ↪ Si  $\Gamma > 0$  alors ..... :

La rotation du solide va ....., la vitesse angulaire va augmenter dans le sens voulu.

    ↪ Si  $\Gamma < 0$  alors ..... :

La rotation du solide va freiner, la vitesse angulaire va ..... dans le sens voulu.

➤ Soit une rotation dans le **sens** ..... autour de  $(\Delta)$  alors  $\theta \searrow, \dot{\theta} < 0$  :

    ↪ Le raisonnement est **inversé**, il faudra que  $\Gamma < 0$  pour ..... dans le sens voulu.

**Lorsque  $\Gamma$  et  $\omega$  sont du même signe, le couple est un couple .....  
 Lorsque  $\Gamma$  et  $\omega$  sont de signe opposé, le couple est un couple .....**

### III . Approche énergétique

Etant donné qu'il existe une vitesse de rotation, il existe donc une énergie cinétique de rotation donc un solide va posséder pour un mouvement composé quelconque une **énergie cinétique de .....** et une **énergie cinétique de rotation**.

Pour une rotation autour d'un axe fixe, il n'y a que l'énergie cinétique de rotation.

#### A . Energie cinétique

Pour un solide indéformable qui est un système constitué d'une infinité de points  $M_i$  de masse  $m_i$ , en rotation autour d'un axe fixe ( $\Delta$ ), on peut écrire :

$$E_C = \sum_i^{\infty} E_C(M_i) =$$

*Salviati : @Sagredo* L'énergie cinétique de chaque point est **macroscopique**, elle n'a rien à voir avec le chapitre 1 page 4 ou page 18 de la thermodynamique où apparaissent des énergies **microscopiques** de particules avec l'énergie interne. Le solide est modélisé de façon géométrique par des points et pas de façon physique par des particules.

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_i^{\infty} m_i (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM_i})^2 \text{ car } \vec{v}(M_i) = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM_i} \text{ (chapitre V page 10)}$$

où  $O \in \Delta$ , fixe par rapport à un référentiel galiléen.

$$E_C = \frac{1}{2} \sum_i^{\infty} m_i (\omega \vec{e}_{\Delta} \wedge \overrightarrow{OM_i})^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_i^{\infty} m_i \|\vec{e}_{\Delta} \wedge \overrightarrow{OM_i}\|^2$$

On reconnaît le moment d'inertie :  $\sum_i^{\infty} m_i \|\vec{e}_{\Delta} \wedge \overrightarrow{OM_i}\|^2 = \sum_i^{\infty} m_i \|\overrightarrow{H_i M_i}\|^2 = \sum_i^{\infty} m_i r_i^2 = J_{\Delta}$

D'où l'énergie cinétique de rotation autour d'un axe de rotation ( $\Delta$ ) fixe :  $E_C =$

$E_C =$

Pour une énergie cinétique donnée, plus  $J_{\Delta}$  est petit, plus  $\omega$  est .....

La vitesse de rotation sera donc d'autant plus grande que le moment d'inertie est .....





## B. Théorèmes cinétiques

D'après la page 14, le TMC donne :

En multipliant par  $\dot{\theta}$  :

Le terme de gauche donne :

Les termes de droite donnent d'après la page 11 du chapitre V :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \dot{\theta} \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) \text{ et } \boxed{\phantom{000000}} \text{ où } \mathcal{P} \text{ désigne les puissances en W}$$

**La puissance d'un couple de force est le .....**

Si  $\Gamma$  et  $\omega$  sont du même signe, alors  $\mathcal{P}(\Gamma) > 0$ , la puissance est ..... comme le couple qui est moteur. Si  $\Gamma$  et  $\omega$  sont de signe opposé,  $\mathcal{P}(\Gamma) < 0$ , la puissance est .....

On retrouve le TPC : 
$$\boxed{\frac{dE_C}{dt} = \phantom{000000}} \quad \text{(TPC)}$$

En multipliant par  $dt$  :  $dE_C =$

En intégrant : 
$$\boxed{\Delta E_C = \phantom{000000}} \quad \text{(TEC)}$$

Les théorèmes de la puissance cinétique (TPC) et de l'énergie cinétique (TEC) sont valables et utilisables pour un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel galiléen.

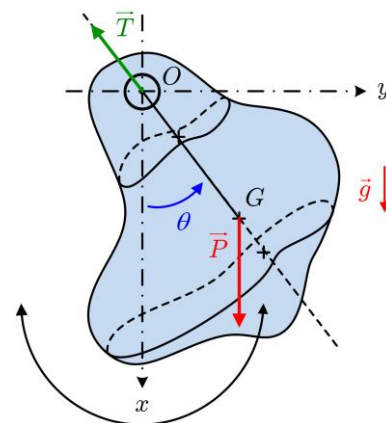
## C. Pendule pesant (2<sup>ème</sup> partie)

Les caractéristiques du poids sont identiques pour le pendule pesant et le pendule simple : même point d'application  $G$ , même norme  $P = mg$ . Les axes  $x$  et  $y$  étant les mêmes aussi, le poids dérive de la même énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{pp} = \phantom{000000} \quad \text{(chapitre III page 10)}$$

Les points d'équilibre sont les mêmes (chapitre III page 20) :

**stables** en  $\theta = \dots\dots\dots, n \in \mathbb{Z}$  et **instables** en  $\theta = \dots\dots\dots, n \in \mathbb{Z}$





L'énergie cinétique est ..... Puisque l'axe de rotation est fixe, elle s'écrit :

$$E_C =$$

Les forces sont conservatives, pas de frottement, donc l'énergie mécanique se conserve :

$$\text{C.I. : } \theta(0) = \theta_0 \text{ et } \dot{\theta}(0) = 0 \Rightarrow E_m = cste = E_m(t=0) = E_C(0) + E_{PP}(0) = mgL(1 - \cos \theta_0)$$

L'intégrale première du mouvement s'écrit donc :

$$E_m = E_C + E_{PP} \Leftrightarrow$$

En dérivant par rapport au temps, on obtient l'équation du mouvement :

...

On peut simplifier par  $\dot{\theta}$  car  $\dot{\theta} \neq 0$  pour  $t \neq 0$

### IV . Récapitulatif des lois physiques

	point matériel système assimilé à un point $M$	solide $S$ de centre de gravité $G$ solide assimilé à une infinité de points $M_i$
quantité de mouvement		$\vec{p} = m\vec{v}(G) = \sum_i m_i \vec{v}(M_i)$
2ème loi Newton	$\frac{d\vec{p}(M)}{dt} = \sum_{forces} \vec{F}(M)$	$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{forces} \vec{F}(S)$
moment cinétique vectoriel	$\vec{L}_O(M) = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)$	
TMC vectoriel	$\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \sum_{forces} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}(M))$	$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_{forces} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}(S))$
moment cinétique scalaire	$L_\Delta(M) = (\vec{OM} \wedge m\vec{v}) \cdot \vec{e}_\Delta$	
TMC scalaire	$\frac{dL_\Delta(M)}{dt} = \sum_{forces} \mathcal{M}_\Delta(M)$	

*Salviati* : La notion de couple n'a pas de sens pour un point matériel.

## Table des matières

I . Cinématique du solide .....	1
A . Translation d'un solide .....	1
1 . Exemples classiques .....	2
2 . Vecteurs du mouvement.....	2
B . Rotation d'un solide.....	3
C . Moments appliqués au solide .....	5
1 . Moment cinétique .....	5
2 . Moment d'inertie.....	6
3 . Valeurs usuelles .....	7
4 . Théorème de König-Huygens.....	8
II . Dynamique du solide.....	9
A . La balançoire à bascule .....	9
B . Pendule pesant (1 <sup>ère</sup> partie).....	11
1 . Décrire le système.....	11
2 . Appliquer les lois physiques .....	12
3 . Comparer au pendule simple.....	12
C . Couple de force .....	13
III . Approche énergétique .....	15
A . Energie cinétique .....	15
B . Théorèmes cinétiques .....	16
C . Pendule pesant (2 <sup>ème</sup> partie).....	16
IV . Récapitulatif des lois physiques.....	17
Table des matières.....	18