

Chapitre II

Optique ondulatoire



*“Si vous voulez trouver les secrets de l’univers, pensez en termes d’énergie, de fréquence et de vibrations.”
Nikola Tesla, 1856-1943, ingénieur austro-américain, inventeur du courant alternatif*

Une **onde** est une
..... Cette définition très générale montre le caractère universel de l’onde. Il existe des ondes qui ne se propagent pas, les ondes stationnaires.

Collège (cycle 4)

- Décrire les conditions de propagation d’un son.
- Relier la distance parcourue par un son à la durée de propagation. Vitesse de propagation
- Notion de **fréquence** : son audibles, infrasons et ultrasons.

Seconde

- Émission et propagation d’un signal sonore. Signal sonore périodique, fréquence et période.
- Relation entre **période** et fréquence.
- Citer les domaines de fréquences des sons audibles, des infrasons et des ultrasons.
- Lien entre forme du signal et timbre. Lien entre amplitude, intensité sonore et niveau d’intensité sonore.
- **Longueur d’onde** dans le vide ou dans l’air.
- Caractériser un rayonnement monochromatique par sa longueur d’onde dans le vide ou dans l’air.
- Spectres d’émission : spectres continus d’origine thermique, spectres de raies.

Première (ES)

- Sons audibles par les humains ont des fréquences comprises entre 20 et 20 000 Hz.

Première (spé)

- Utiliser une échelle de fréquences ou de longueurs d’onde pour identifier un domaine spectral.
- Relation entre longueur d’onde, célérité de la lumière et fréquence.
- Citer l’ordre de grandeur des fréquences ou des longueurs d’onde des ondes électromagnétiques.
- Décrire, dans le cas d’une onde mécanique **progressive**, la propagation d’une perturbation mécanique.
- Célérité d’une onde. **Retard**. Ondes mécaniques périodiques. **Ondes sinusoïdales**.
- Distinguer périodicité **spatiale** et périodicité **temporelle**.
- Justifier et exploiter la relation entre période, longueur d’onde et célérité.

Terminale (spé)

- Interférences de 2 ondes. Interférences constructives, Interférences destructives.
- Caractériser le phénomène d’interférences de deux ondes et en citer des conséquences concrètes.
- **Différence de chemin optique**, conditions d’interférences constructives ou destructives.
- Prévoir les lieux d’interférences dans le cas des trous d’Young. Établir l’expression de l’**interfrange**.

Grandeurs principales : (S.I. pour Système International)

Grandeur physique	Symbole	Unité (S.I.)	Dimension	Apparition
fréquence				Cycle 4 (3 ^{ème})
vitesse ou célérité				Cycle 4 (3 ^{ème})
longueur d’onde				2 ^{nde}

S.I. : T : temps, L : longueur, M : masse, I : intensité, Θ : température, N : quantité de matière

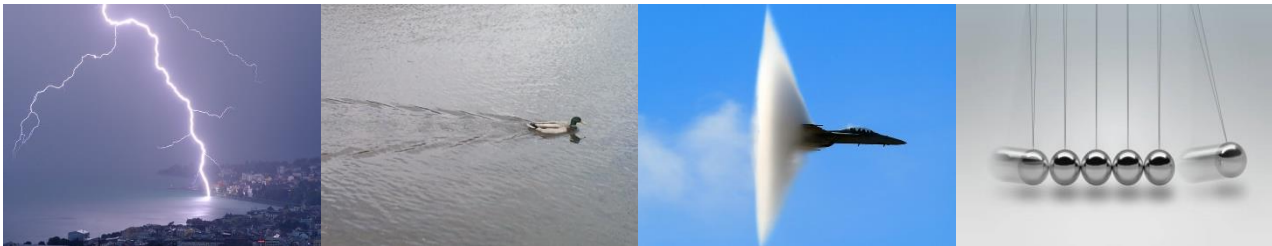
MATHS

- Trigonométrie, valeurs absolues, fonctions à deux variables, intégrales

I. Phénomènes ondulatoires

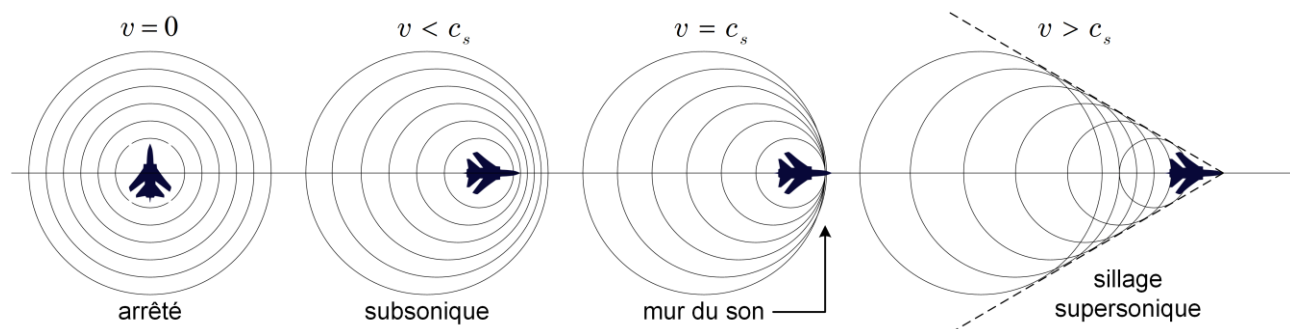
Compléter le tableau ci-dessous :

Signal	Domaine de fréquences	Grandeur physique
acoustique	audible : de ... Hz à ... kHz (10^3 Hz) infrason ultrason P v
électrique	... Hz (Europe), ... Hz (USA) u i
électromagnétique	visible : de à THz (10^{12} Hz) infrarouge ultraviolet \vec{E} \vec{B}



 **Culture scientifique :**

- Quelle est la différence entre le tonnerre et l'éclair ?
- Les ultrasons sont-ils plus rapides que les infrarouges ?
- Le canard va-t-il plus vite que les ondes de surface qu'il produit ?
- Vitesse des électrons dans un courant ?
- Le est le son émis par la foudre et en est la lumière.
- Les qui vont à 340 m.s^{-1} dans l'air et à 1500 m.s^{-1} dans l'eau, ils sont donc bien plus lents que les, lumière invisible, qui vont à environ 3.10^8 m.s^{-1} .



- Le canard est plus rapide que les ondes de surface qu'il produit (environ 20 cm.s^{-1}), il crée donc un tout comme l'avion supersonique une fois passé le mur du son. Dans certains milieux **très particuliers** où les particules vont plus vite que la lumière, elles rayonnent en créant un de lumière, c'est l'effet **Tcherenkov**.

- La vitesse de transmission du choc d'une bille à l'autre du pendule de Newton est plus grande que celle de l'oscillation des billes, tout comme l'électricité qui va presque à la vitesse de la lumière alors que les électrons

La, le, la et les sont des phénomènes propres à toutes les ondes (électromagnétiques, acoustiques, mécaniques, etc...)

II . Ondes progressives

Soit une fonction $f : x \mapsto f(x)$ dont la courbe représentative est ci-dessous :

➤ Points remarquables :

$$f(0) = \dots \text{ et } f\left(\frac{1}{2}\right) = -f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dots$$

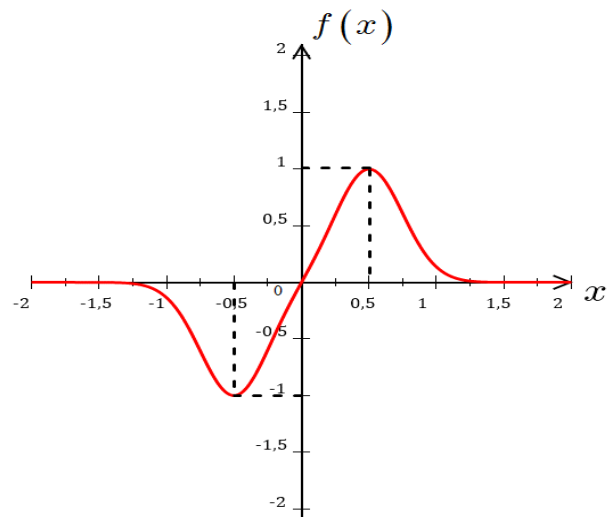
➤ Soit la fonction décalée :

$$g : x \mapsto g(x) = f(x) + 1$$

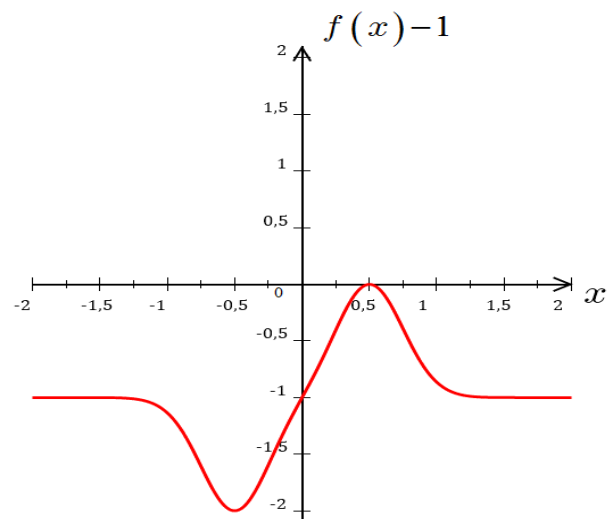
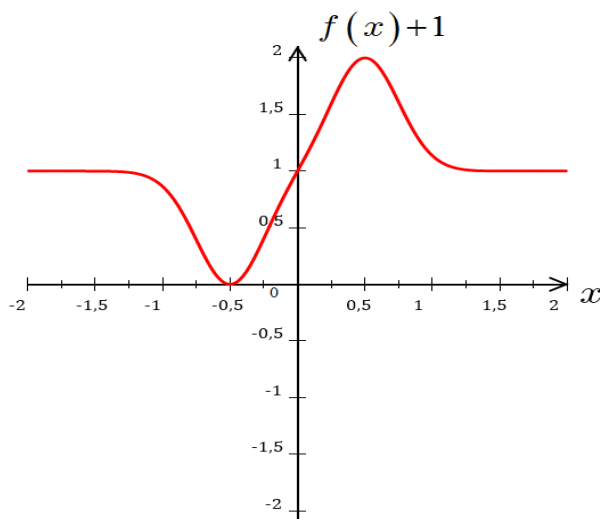
$$g(0) = f(0) + 1 = \dots,$$

$$g\left(\frac{1}{2}\right) =$$

$$\text{et } g\left(-\frac{1}{2}\right) =$$



La courbe de g sera la même que celle de f mais :

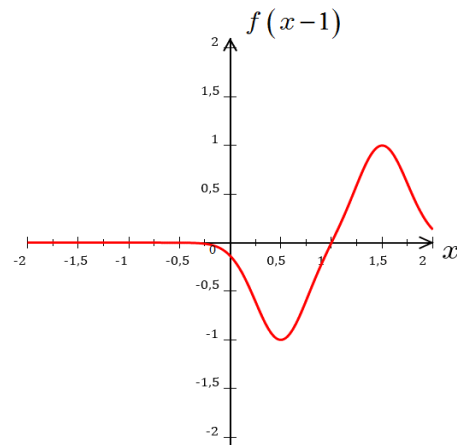
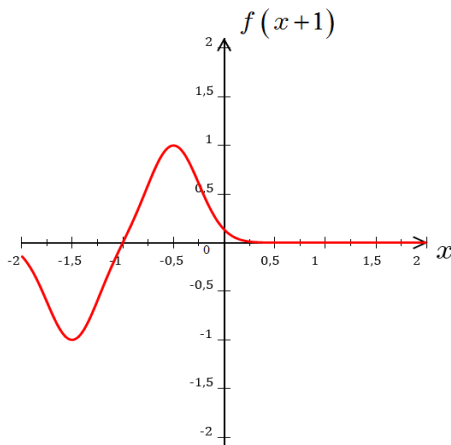


Lorsqu'on passe de $f(x)$ à $f(x)+b$ i.e. lorsqu'on rajoute une composante continue b à une fonction,

➤ Soit la fonction décalée : $h : x \mapsto h(x) = f(x+1)$

$$h\left(-\frac{3}{2}\right) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \dots, \quad h(-1) = \dots, \quad h\left(-\frac{1}{2}\right) = \dots$$

h atteint les mêmes ordonnées que f mais elle les atteint sur l'axe des abscisses. La courbe de h est la même que celle de f mais



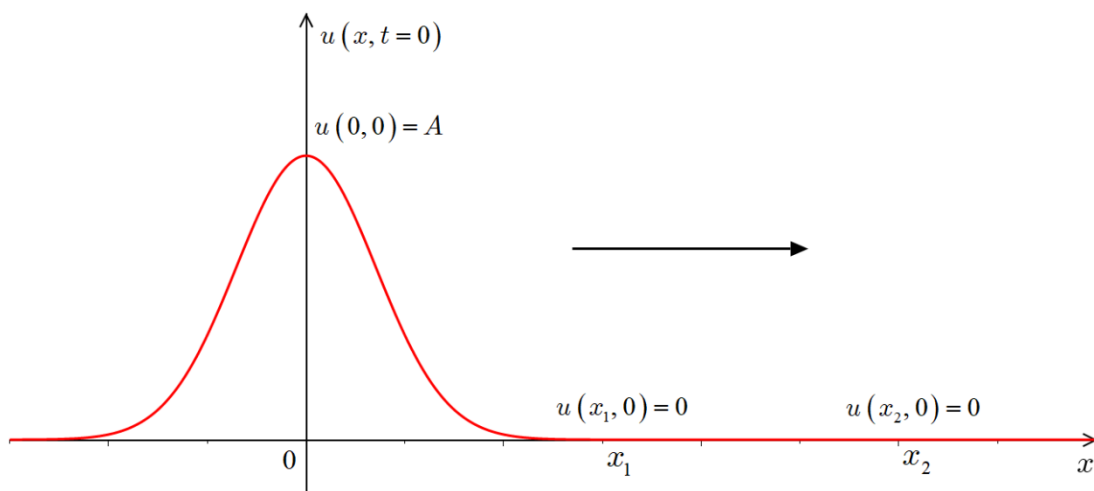
Lorsqu'on passe de $f(x)$ à $f(x+a)$ i.e. lorsqu'on rajoute une phase a à la variable de la fonction,

A . Propagation linéaire non dispersive

Soit une onde représentée par une fonction u . Par exemple, dans le cas d'une corde, u représente la hauteur de déformation c'est-à-dire son **amplitude**. On suppose qu'il s'agit d'une onde qui se propage selon un axe Ox de gauche vers la droite.

La propagation est i.e. à vitesse constante notée $+v$.

Dans la figure suivante prise à l'instant initial $t=0$, pour simplifier, la fonction a une forme de cloche mais on aurait pu lui donner n'importe quelle forme. L'onde évolue dans le temps et l'espace donc la fonction dépend des 2 variables : $u : x, t \mapsto u(x, t)$.



Puisqu'on a tracé la fonction u à t fixé, c'est comme si on avait tracé

On suppose que la propagation est **unidirectionnelle** (selon Ox) et **non atténuée** (amplitude constante, signal translaté, pas de perte énergétique). Il s'agit d'un modèle d'onde simple pour comprendre le phénomène de propagation.

Hyp1 : On considère une onde

1. Propagation dans le sens des x croissants

A un instant **fixé** $t = t_1 > 0$, l'onde s'est déplacée d'une distance x_1 :

Puis, à un nouvel instant $t_2 > t_1$, l'onde s'est déplacée jusqu'à une distance x_2 :

La courbe de u est la même aux instants $t=0$, t_1 et t_2 , elle s'est juste déplacé vers la droite or un décalage vers la droite correspond au rajout d'une phase négative :

$$u(x, t=0) = f(x), \quad u(x, t=t_1) = \dots \quad \text{et} \quad u(x, t=t_2) = \dots$$

La vitesse étant **constante**, on peut écrire que $x_1 = \dots$ et $x_2 = \dots$, ainsi :

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, t_1) = \dots, \quad u(x, t_2) = \dots \quad \text{avec} \quad \boxed{v = \dots}$$

Ces relations doivent être vraies quelle que soient les valeurs de t_1, t_2 donc :

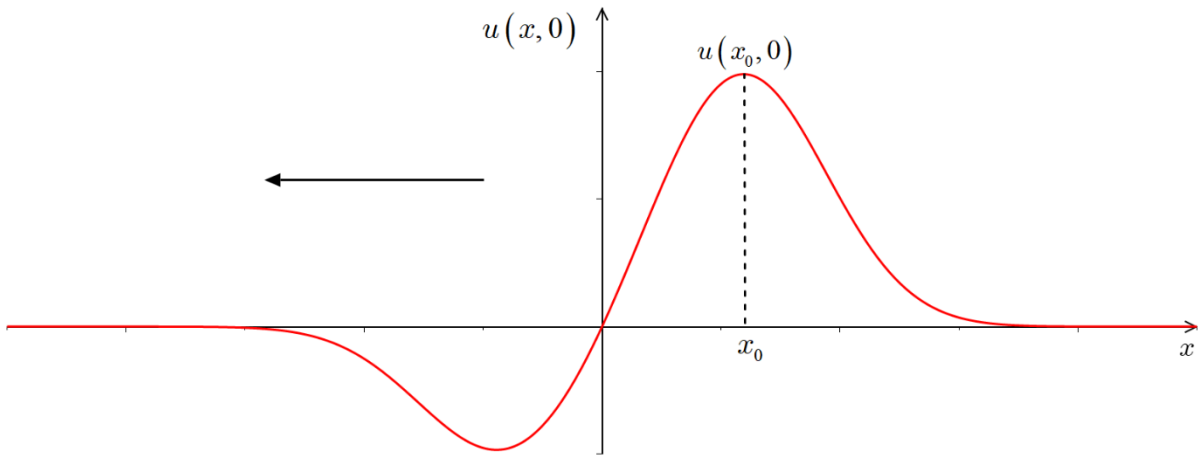
$$u(x, t) = \dots$$

➤ **Retard temporel** : La courbe de u se déplace vers sans modification lorsque le temps augmente donc **la phase** de l'onde est et vaut

La fonction $f(x-vt)$ à un instant t est de par rapport à $f(x)$ à l'instant initial c'est pourquoi les courbes se décalent vers

2 . Propagation dans le sens des x décroissants

Soit une onde progressive non dispersive unidirectionnelle représentée par une fonction u à un instant $t=0$ sauf qu'elle se propage à la vitesse $-v$ dont voici l'allure :



La courbe en $t = t_1$ est la même mais décalé vers la gauche donc $u(x, t) = g(\dots\dots\dots)$.

➤ **Avance temporel** :

.....

.....

.....

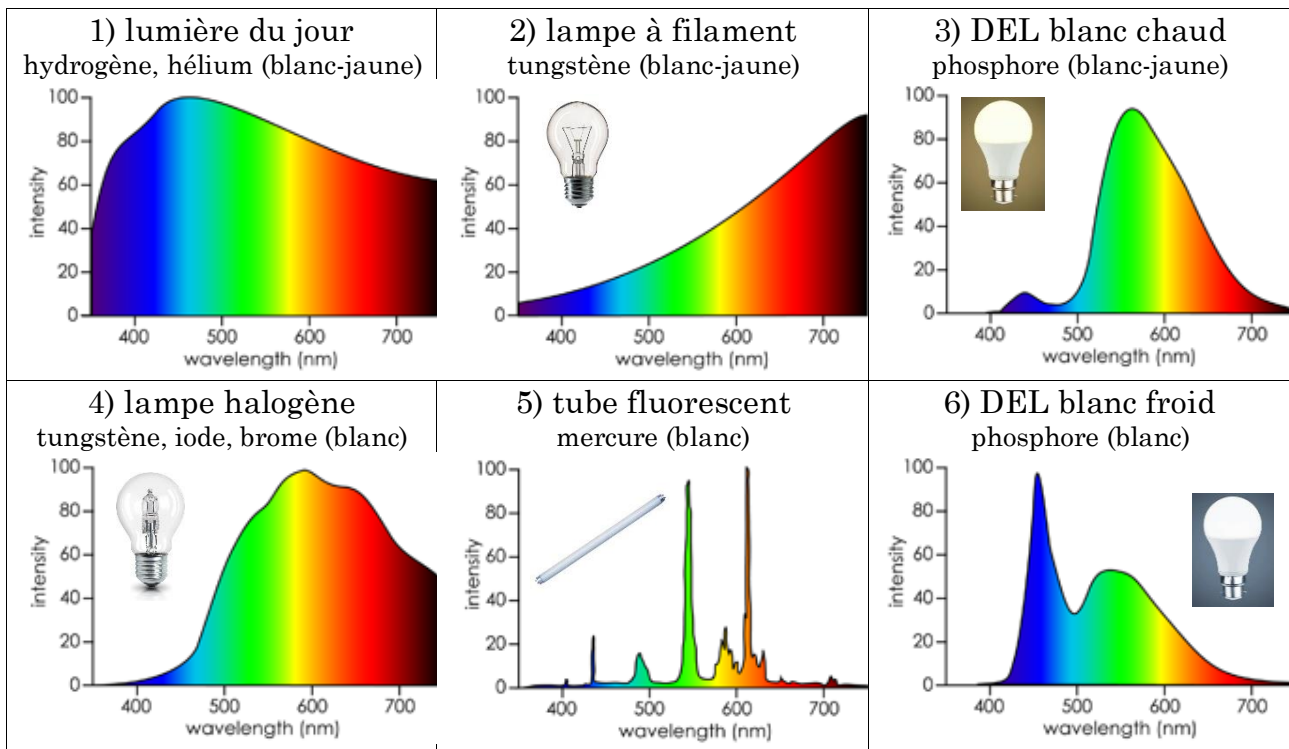
Pour déterminer le temps t_1 en fonction de x_1 , x_0 et v , on peut utiliser le maximum de la courbe qui s'est déplacé d'une distance $\Delta x =$ donc $t_1 = \frac{\quad}{v}$ avec $x_1 < 0$.

Les ondes **progressives** peuvent toutes s'écrire sous la forme $f(\dots\dots\dots)$ ou $g(\dots\dots\dots)$.
On trouve souvent la notation $f(\dots\dots\dots)$ ou $g(\dots\dots\dots)$ avec c pour célérité de l'onde.

B . Sources monochromatiques

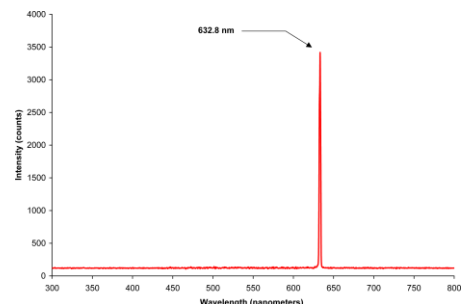
On caractérise une source **lumineuse** par une ou plusieurs fréquences **propres** à la vibration du champ électromagnétique qui la constitue.

Les fréquences étant de l'ordre de 10^{14} Hz, on préfère utiliser



L'ordonnée représente l'intensité lumineuse à différentes échelles. Tous les spectres sauf le 5 sont car aucune longueur d'onde n'a d'intensité nulle dans le domaine visible. Le spectre du tube fluorescent est considéré comme un spectre car on reconnaît plusieurs pics pour certaines longueurs d'onde particulières.

Une source est **monochromatique** si elle émet
 *i.e.* l'intensité de toutes les autres longueurs d'onde est supposée nulle. Aucune source n'est rigoureusement monochromatique. Comme le montre le spectre d'un laser He-Ne dont la longueur d'onde est à 632,8 nm, il y a toujours une légère autour de la longueur d'onde propre et l'intensité des autres longueurs n'est pas nulle mais négligeable : il y a un léger **bruit** électromagnétique.



Hyp2 : On considère comme modèle une source

C . Ondes sinusoïdales

Utiliser le formulaire de trigonométrie

Une onde sinusoïdale notée $u(x, t)$ qui se propage vers les x croissants peut s'écrire :

$$u(x, t) =$$

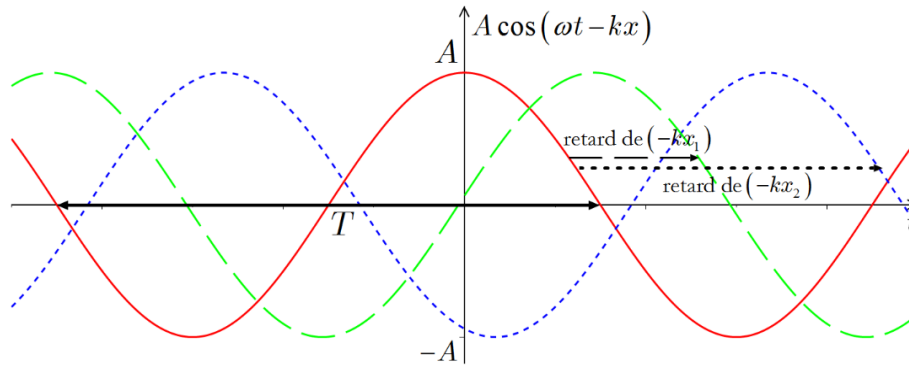
où A, k, ω, φ sont des constantes. $k > 0$ et $\omega > 0$ (réels positifs).

A est de l'onde, ω en rad.s^{-1} et φ

1. Avance et retard

Cette phase φ ne dépend ni de x , ni de t , elle décale juste initialement en $(x, t) = (0, 0)$ la courbe vers la gauche ou vers la droite. On choisit $\varphi = 0$ dans ce paragraphe.

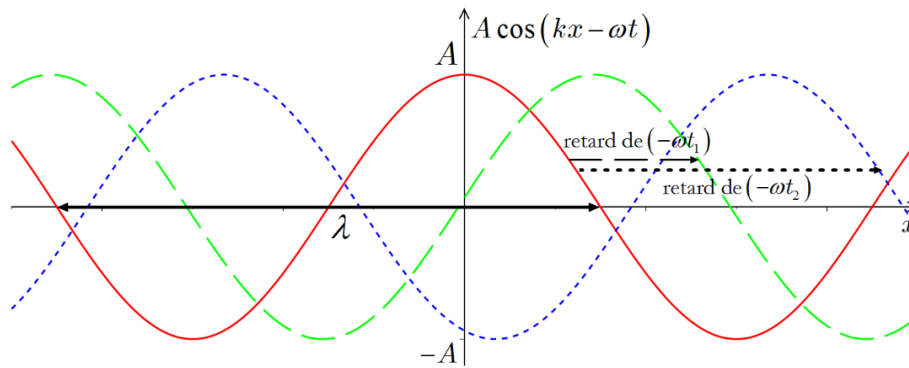
Voici l'évolution **temporelle** pour x_1, x_2 avec $x_2 > x_1$:



La phase $\varphi_2 = -kx_2 < 0$ décale que la phase $\varphi_1 = -kx_1 < 0$.
 Dans l'ordre, la courbe **bleue** est la plus en puis la **verte**, et la **rouge** où $x=0$.

Déphasage à x fixé : $\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2 = k(\dots\dots\dots)$

Voici l'évolution **spatiale** pour t_1, t_2 avec $t_2 > t_1$ (λ non modifié, on choisit $\varphi = 0$) :



.....

 Déphasage à t fixé :

2. Double périodicité

On factorise l'expression générale par k : $u(x, t) = A \cos\left(k\left(\quad\quad\quad\right) + \varphi\right)$

Il faut que $\boxed{\begin{matrix} \dots & & \dots \\ \dots & = & \dots \\ \dots & & \dots \end{matrix}} \Leftrightarrow \dots = \dots$ pour que $u(x, t)$ soit de la forme $f(x - vt)$ (hyp1 page 4)

Soit T la plus petite période **temporelle** de $u(x, t)$, on peut écrire :

\Leftrightarrow

Un cosinus a pour période 2π donc $A \cos(kx - \omega t + \varphi) = \dots\dots\dots$

Par identification, $\omega T = \dots\dots\dots$ mais $T > 0$, $\omega > 0$, donc on choisit $\omega T = \dots\dots\dots$ d'où :

$$\omega = \dots\dots\dots \Leftrightarrow T = \dots\dots\dots$$

Soit λ la plus petite période **spatiale** de $u(x, t)$, on peut écrire :

$$\Leftrightarrow$$

Le cosinus a pour période 2π donc $A \cos(kx - \omega t + \varphi) = \dots\dots\dots$

Par identification, $k\lambda = \dots\dots\dots$ mais $\lambda > 0$, $k > 0$, donc on choisit $k\lambda = \dots\dots\dots$ d'où :

$$\lambda = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \dots\dots\dots$$

➤ **Double périodicité spatiale et temporelle (tableau à connaître)**


	...temporelle	unité	...spatiale	unité	nom
période...					
fréquence...					
pulsation...					

➤ **Milieux transparents homogènes isotropes**

Si la lumière se propage dans le vide, sa vitesse est $c \approx 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

Sa longueur d'onde s'écrit alors $\lambda_{\text{vide}} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$ où f est la fréquence propre.

Si la lumière se propage dans un milieu autre que le vide, sa longueur d'onde s'écrit :

$$\lambda_{\text{milieu}} = \frac{2\pi}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} \text{ donc } \lambda_{\text{milieu}} = \frac{\lambda_{\text{vide}}}{n}$$


Une onde lumineuse voit sa longueur d'onde **modifiée** lorsqu'elle change de milieu.

Les grandeurs temporelles sont propres seulement à l'onde alors que les grandeurs spatiales dépendent

Une onde **ne change pas de couleur** selon le milieu, sa couleur reste la même, liée à sa longueur d'onde dans le vide. Pour une onde sonore, c'est la fréquence qui conduit à un son aigu ou grave. De même, pour une onde lumineuse, c'est qui conduit à une couleur et non la longueur d'onde.

III . Interférences optiques

On s'intéresse à l'évolution au cours du temps à x fixé. Lorsque 2 ondes ou plus de même fréquence se superposent, il apparaît un phénomène d'.....

A . Superposition de deux signaux

Soient 2 signaux de même fréquence : $u_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $u_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$.

 Utiliser le formulaire de trigonométrie 

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/general/somme.php

La somme de 2 ondes sinusoïdales est une :
 \Leftrightarrow

1 . Démonstration vectorielle

Dans un repère xOy , on considère les vecteurs \vec{OP} , \vec{OP}_1 et \vec{OP}_2 tels que : $\vec{OP} = \vec{OP}_1 + \vec{OP}_2$

Soient les normes $\|\vec{OP}_1\| = A_1$, $\|\vec{OP}_2\| = A_2$, $\|\vec{OP}\| = A$ correspondant aux amplitudes.

Soient les angles $(Ox, \vec{OP}_1) = \varphi_1$, $(Ox, \vec{OP}_2) = \varphi_2$ et $(Ox, \vec{OP}) = \varphi$ correspondant aux phases.

En coordonnées cartésiennes :

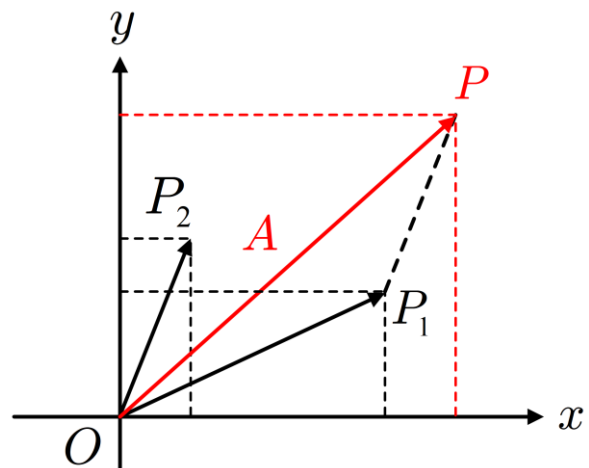
$$\vec{OP} = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \vec{OP}_1 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}, \vec{OP}_2 = \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$$

La relation encadrée est vérifiée en $t = 0$:

On utilise le développement vu en maths 1^{ère} :

$$A^2 = \|\vec{OP}\|^2 =$$

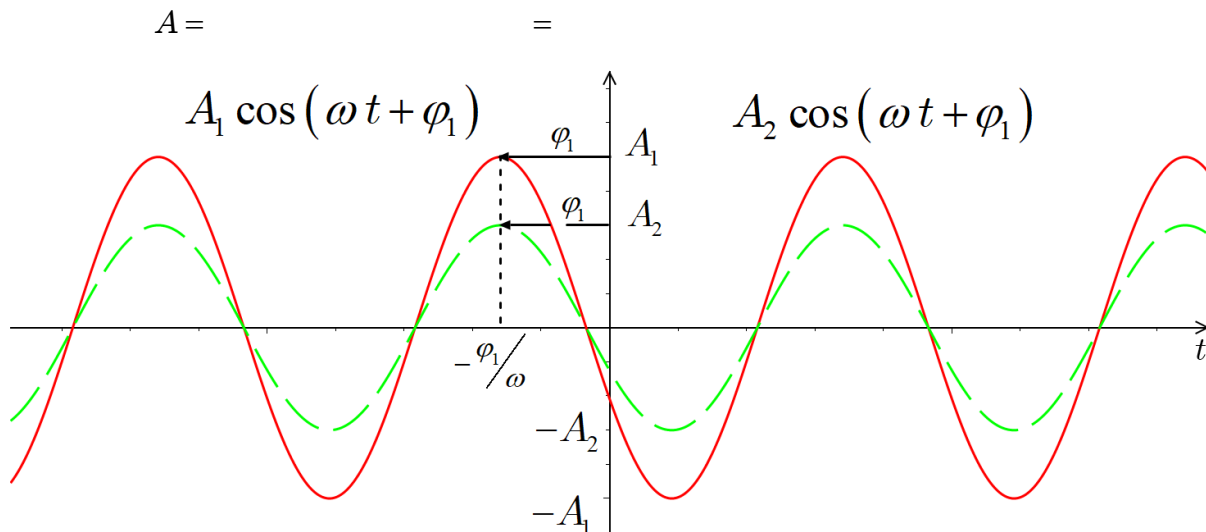
Or $(\vec{OP}_1, \vec{OP}_2) = \dots$ donc $A^2 =$



Finalement, $A =$ (formule de Fresnel)

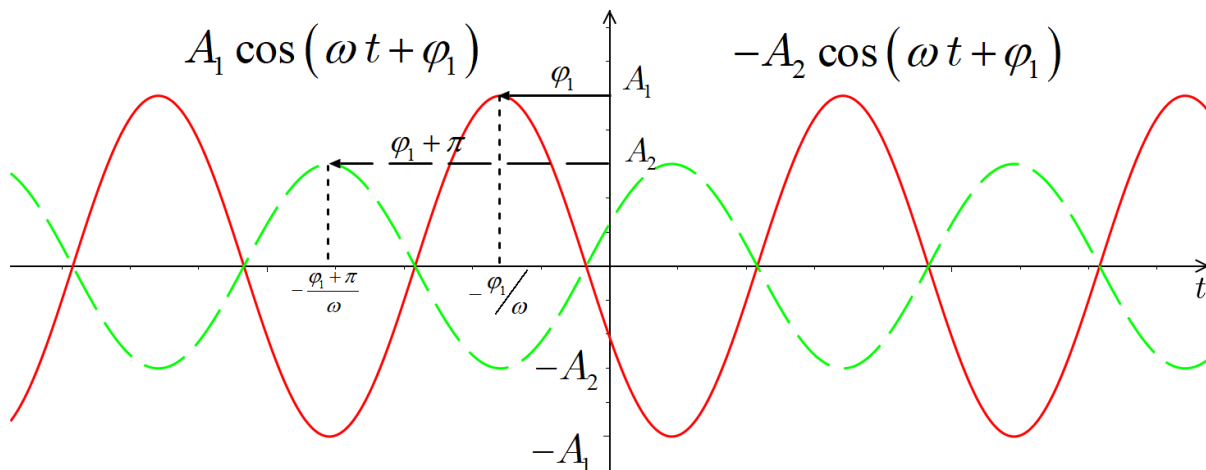
2. Interférences particulières

Les interférences sont lorsque l'amplitude de l'onde résultante est maximale i.e. $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \dots$, $p \in \mathbb{Z}$ i.e. $\varphi_2 - \varphi_1 = m\pi$ avec m **pair** :



Les interférences sont **destructives** lorsque
 avec m **impair** :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\dots)} = \dots = \dots = \begin{cases} \dots & \text{si } A_1 > A_2 \\ \dots & \text{si } A_1 < A_2 \\ \dots & \text{si } A_1 = A_2 \end{cases}$$

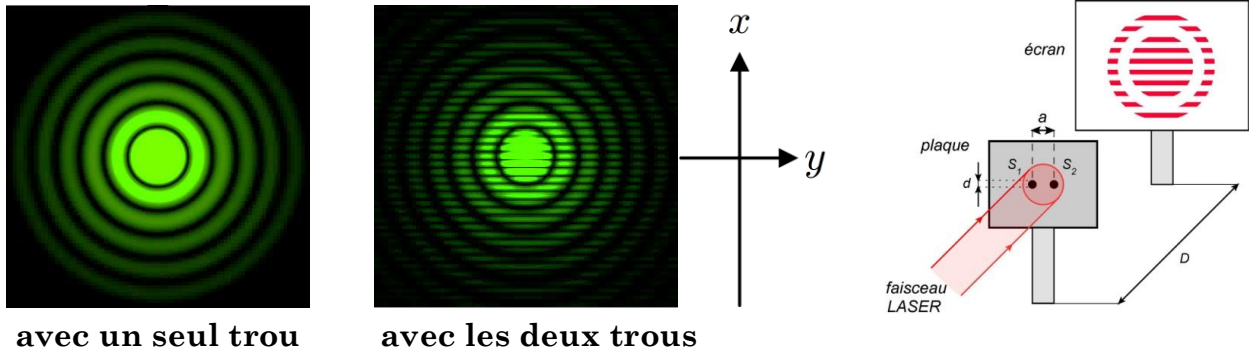


@Simplicius Dans le cas général, $A \neq A_1 + A_2$. Il n'existe pas de cas où φ est égal à φ_1 plus ou moins φ_2 , faire la somme des phases est toujours faux sauf s'ils sont tous nuls.

Ne pas confondre le **déphasage** $\Delta\varphi$ entre les deux ondes tel que $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ avec la phase de l'onde résultante appelée φ tel que $\varphi =$

B . Trous d'Young (1801)

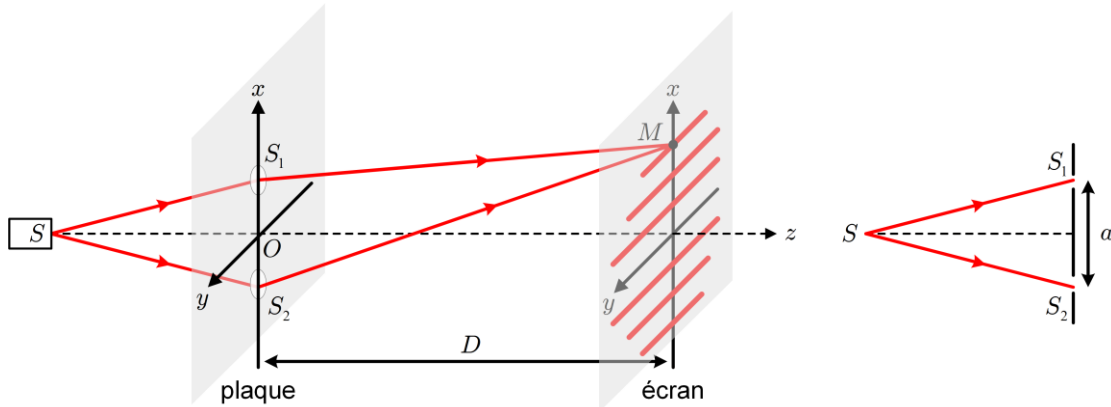
L'expérience de Thomas Young (1773–1829) consiste à émettre un faisceau lumineux monochromatique ponctuel à travers deux petits trous placés l'un au-dessus de l'autre et séparés d'une distance a sur une plaque opaque. Sur un écran placé à une distance D **très grande** devant les autres longueurs, on observe les figures suivantes :



Avec un seul trou, on observe un phénomène de **diffraction**, on parle de tâche d'Airy. Avec deux trous, en plus du phénomène à un seul trou, on observe un phénomène d'..... *i.e.* une succession de bandes **horizontales** qui dépendent de x .

Objectif : Déterminer les positions des franges brillantes selon l'axe des x .

On modélise les 2 trous d'Young par 2 sources secondaires S_1 et S_2 :



1 . Intensité lumineuse et déphasage

On a vu que l'amplitude de l'onde résultante s'écrivait $A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\Delta\varphi)$.

On admet que l'intensité lumineuse résultante s'écrit : $I =$ $I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi)$,

avec I_1 et I_2 les intensités lumineuses provenant de chacune des sources S_1 et S_2 .

$\Delta\varphi$ est le **déphasage** entre les ondes issues de S et passant par S_1 et S_2 .

Soient t_1 et t_2 les temps mis par les ondes issues de S passant par S_1 et S_2 .

Comme on l'a vu page 8, l'onde passant par S_1 aura un retard de phase de $-\omega t_1$ et l'onde passant par S_2 aura un retard de phase de $-\omega t_2$ donc $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 =$

Avec la double périodicité : $\omega = \dots = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vide}}} v = \frac{2\pi}{\lambda_{\text{vide}}} v$ donc $\Delta\varphi =$

$v t_2$ et $v t_1$ correspondent aux
 donc $v t_2 = \dots + \dots$ et $v t_1 = \dots + \dots$

On définit le **chemin optique** comme la distance parcourue par une onde
 qu'elle traverse. Pour les trous d'Young, les chemins optiques s'écrivent : et

On a alors $\Delta\varphi =$

On définit la **différence de chemin optique** δ par : $\delta(M) =$

Ainsi, $\Delta\varphi =$ ou encore : $\Delta\varphi =$ (k_0 norme du vecteur d'onde)

2. Différence de chemin optique

Pour les trous d'Young, la lumière se propage dans l'air donc $n \approx 1$.

Les trajets de la lumière SS_1 et SS_2 sont identiques donc :

$$\delta =$$

Dans le repère cartésien, on utilise la norme d'un vecteur :

$$AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

$$S_1\left(\frac{a}{2}, 0, 0\right), M(x, y, D) \text{ donc : } S_1M =$$

On factorise par D^2 : $S_1M =$

ε	0,5	0,1	0,01	0,001
$\sqrt{1+\varepsilon}$				
$1 + \frac{1}{2}\varepsilon$				

On admet que lorsque $\varepsilon \ll 1$ alors

Comme D est grand, $D \gg a$, $D \gg x$, $D \gg y$ alors $\frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{D^2} \dots\dots 1$ et donc :

$$S_1M \approx D \left(1 + \frac{\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2}{2D^2} \right) = D + \frac{1}{2D} \left(\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 \right) \text{ (développement limité d'ordre 1)}$$

De même, $S_2\left(-\frac{a}{2}, 0, 0\right)$ donc $S_2M =$

D'où $\delta = S_2M - S_1M =$ après simplification des D et des y^2 .

$$\Rightarrow \delta = \frac{ax}{D} \text{ après simplification des } x^2 \text{ et des } \frac{a^2}{4}.$$

Finalement, $\delta \approx \frac{ax}{D}$ (x est la position verticale sur l'écran)

3. Franges brillantes et franges sombres

Puisque les ondes proviennent d'une même source, $I_1 = I_2 = I_0$ donc d'après la page 12 :

$$I = 2I_0 + 2I_0 \cos(\Delta\varphi) = 2I_0(1 + \cos(\Delta\varphi))$$

Les franges **brillantes** correspondent à une intensité $I \dots\dots\dots$ donc lorsque $\cos(\Delta\varphi)$ vaut $\dots\dots$ donc lorsque $\Delta\varphi = \dots\dots, p \in \mathbb{Z}$, on retrouve la valeur de $\Delta\varphi$ pour les interférences $\dots\dots\dots$. Cela correspond donc à $I =$

$$\Delta\varphi = 2p\pi \Leftrightarrow \delta = \frac{p\lambda}{2}, p \in \mathbb{Z}$$

Pour des interférences $\dots\dots\dots$, la différence de marche doit être $\dots\dots\dots$ de la longueur d'onde. Le nombre entier p est l'**ordre** d'interférence, frange d'ordre p .

Résolution du problème : Pour les trous d'Young, $\delta \approx \frac{ax}{D}$ $\Leftrightarrow x = \frac{p\lambda D}{2a}, p \in \mathbb{Z}$

Ainsi, on aura une frange **brillante** en $x = \dots, x = \dots, x = \dots, \text{ etc...}$

L'**interfrange** qui est la distance entre 2 franges brillantes successives vaut :

$$i = x_{p+1} - x_p = \frac{\lambda D}{2a} \Leftrightarrow i = \frac{\lambda D}{2a}$$

Application numérique : $\lambda_0 = 632,8 \text{ nm}$, $D = 2,50 \text{ m}$, $a = 1,50 \text{ mm}$, on trouve $i \approx \dots\dots\dots \text{ mm}$

.....

$$\Delta\varphi = \quad , p \in \mathbb{Z}$$

Pour les trous d'Young, $\delta \approx$ $x =$, $p \in \mathbb{Z}$

Une frange brillante et une sombre sont séparées de $\frac{1}{2} \frac{\dots\dots}{\dots}$ pour les trous d'Young.

IV . Signaux périodiques

Simplicius, Sagredo : Pourquoi s'intéresse-t-on autant aux ondes sinusoïdales ?

A . Valeur moyenne

La moyenne u_{moy} d'une grandeur u est le rapport entre la somme des valeurs u_i sur le

nombre de valeurs N : $u_{\text{moy}} = \frac{u_1 + u_2 + \dots + u_N}{N} =$ (utile en Thermodynamique)

Pour une fonction **continue** $u : t \mapsto u(t)$ et périodique de période T , on fait la somme continue de chaque valeur $u(t)$ pour chaque t i.e. on calcule l'intégrale de u sur une période de cette fonction. La **valeur moyenne** $\langle u \rangle$ d'un signal est donc définie par :

$$\langle u \rangle =$$

➤ **Moyenne d'un cosinus ou d'un sinus**

$$\left\langle \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \right\rangle =$$

$$\text{Or } \sin(2\pi + \varphi) = \sin(\varphi) \text{ donc } \left\langle \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \right\rangle = \dots$$

$$\left\langle \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \right\rangle = \left\langle \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \right\rangle = \left\langle \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi'\right) \right\rangle = \dots \text{ avec } \varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

La moyenne d'un cosinus ou d'un sinus est sur une période.

➤ **Linéarité de la moyenne par linéarité de l'intégrale :**

Soit 2 fonctions périodiques du temps, intégrables sur \mathbb{R} : $u_1 : t \mapsto u_1(t)$ et $u_2 : t \mapsto u_2(t)$

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, \langle au_1 + bu_2 \rangle =$$

$$= \quad \text{(linéarité de la moyenne)}$$

➤ On considère un signal **sinusoïdal** à une variable : $u(t) = U \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$.

$$u(t+T) = \quad = u(t)$$

Ce signal est bien périodique de période T puisque $u(t+T) = u(t)$.

$$\text{Donc } \langle u \rangle = \left\langle U \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \right\rangle \stackrel{\text{linéarité}}{=} \quad = \dots$$

➤ $\langle \sin(\varphi) \rangle =$

La moyenne d'une constante est égale à la constante, évidemment.

B. Valeur efficace

Etant donné que la valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est toujours, elle ne donne pas d'informations sur le signal. On s'intéresse alors à la moyenne du carré.

➤ **Moyenne quadratique :**

$$\left\langle \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \right\rangle = \quad \text{(formulaire)}$$

=

$$\left\langle \sin^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) \right\rangle = \left\langle \cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi' \right) \right\rangle = \dots \text{ avec } \varphi' = \varphi - \frac{\pi}{2}$$

La moyenne du carré d'un cosinus ou d'un sinus vaut sur une période.

On s'intéresse donc à la racine de la **moyenne quadratique** i.e. la valeur efficace U_{eff} :

$$\boxed{U_{\text{eff}} =} \quad = \sqrt{\langle u^2 \rangle} \text{ (valeur efficace d'un signal)}$$

Pour un signal sinusoïdal, $u(t) = U \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$, quel que soit l'amplitude ou la phase :

$$U_{\text{eff}} =$$

La valeur efficace d'un signal sinusoïdal est égale à

C . Série de Fourier

N'importe quel signal périodique peut se décomposer en série de Fourier.

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/general/synthese.html

Une série de Fourier est une somme infinie de cosinus ou de sinus dont les pulsations sont des **multiples** de la pulsation ω_1 du fondamental qu'on notera juste ω :

$$u(t) =$$

avec A_n les amplitudes, $\omega_n = n\omega$ les pulsations temporelles et φ_n les phases

$$\langle u \rangle =$$

La composante continue A_0 est aussi *i.e.* la valeur autour de laquelle varie le signal périodique de pulsation ω .

On considère le signal simplifié suivant : $u(t) = A_1 \cos(\omega t) + A_2 \cos(2\omega t) + A_3 \cos(3\omega t)$

On a bien sûr $\langle u \rangle = \dots$ et on s'intéresse à $U_{\text{eff}}^2 = \langle u^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt$. En développant :

$$U_{\text{eff}}^2 = \quad + \quad +$$

$$+ \quad + \quad +$$

Les moyennes $\langle \cos \cos \rangle$ sont nulles car ces produits sont de période T (démonstration TD2 Ex5).

On sait que $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$ (moyenne quadratique)

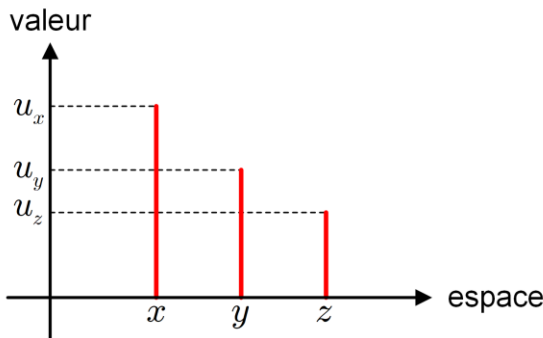
$$\langle \cos^2(2\omega t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(2\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{1 + \cos(\dots \omega t)}{2} dt = \frac{1}{2T} \left[\dots + \frac{\sin(\dots \omega t)}{\dots \omega} \right]_0^T$$

$$= \frac{1}{2T} \left[T + \frac{\sin(\dots \pi) - \sin(\dots)}{\dots \omega} \right]_0^T = \frac{T}{\dots} = \dots \text{ et de même } \langle \cos^2(3\omega t) \rangle = \dots$$

On obtient finalement : $U_{\text{eff}}^2 =$

.....
 On peut y voir un théorème de Pythagore.

Tout comme un vecteur \vec{u} possède 3 coordonnées (u_x, u_y, u_z) tel que $\|\vec{u}\|^2 =$,
 le signal $u(t)$ possède 3 composante spectrales (A_1, A_2, A_3) :



Tout comme il est possible d'étudier la mécanique selon une seule direction x , y ou z par projection vectorielle, il est possible d'étudier séparément les harmoniques d'un signal par décomposition spectrale (voir chapitre V Filtrage linéaire page 5).

La démonstration simplifiée se généralise pour un signal $u(t) = A_0 + \sum_{n=1} A_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$:

$$\boxed{U_{\text{eff}}^2 =} \quad (\text{théorème de Parseval, 1799})$$

D . Milieux dispersifs

Lorsqu'on étudie une onde monochromatique donc à une seule pulsation, cela n'a pas d'importance que le milieu soit dispersif ou non mais lorsqu'on étudie une onde polychromatique donc une superposition d'ondes, il faut en tenir compte :

$$u(x, t) = \quad \text{avec } k_n = \dots \text{ et } \omega_n = \dots$$

On factorise l'expression générale par les k_n : $u(x, t) =$

Il faut que $\boxed{\quad = \quad =}$ pour que $u(x, t)$ soit de la forme $f(x - vt)$

Un milieu **dispersif** est un milieu dans lequel
, la vitesse qu'on utilisait avant devient la **vitesse de phase**.

Dans un milieu dispersif, une onde reste de la forme $f(\dots)$ ou $g(\dots)$.

La vitesse de phase peut être négative et peut aussi être supérieure à la vitesse de la lumière dans le vide c . On définit donc une autre vitesse plus significative de la propagation réelle de l'onde qu'on appelle la **vitesse de groupe** $v_g(\omega)$.

$$\boxed{v_\varphi(\omega) = \frac{\dots}{\dots}} \text{ et } \boxed{v_g(\omega) = \frac{\dots\dots}{\dots\dots}} \text{ (dérivée de } \omega \text{ par rapport à } k \text{)}$$

➤ Dans un milieu non dispersif, $\omega \propto k$ donc $\omega = \dots\dots\dots$ où α une constante positive.

D'où $\frac{\omega}{k} = \dots\dots\dots$, on en déduit $v_\varphi = \dots\dots\dots$. Par ailleurs, $\frac{d\omega}{dk} = \dots\dots\dots$ donc $v_g = \dots\dots\dots$

Lorsque le milieu est non dispersif, $\dots\dots\dots$ et **la relation de dispersion est** $\dots\dots\dots$ i.e. la relation entre ω et k est une relation de proportionnalité. C'est le cas pour les ondes acoustiques dans l'air, pour les ondes élastiques dans un solide, pour les ondes lumineuses dans le vide.

➤ Dans un milieu dispersif, la relation de dispersion est $\dots\dots\dots$

Exemple 1 : Les ondes gravitaires

Les ondes de surface que provoque un canard sur l'eau peuvent être modélisées. Le modèle basé sur la mécanique des fluides conduit à la relation de dispersion :

$$\omega^2 = gk \text{ où } g \text{ est l'intensité de la pesanteur d'où } \omega = \sqrt{gk}$$

Ce qui donne $v_\varphi = \dots\dots\dots$ et $v_g = \dots\dots\dots$ (\sqrt{x} a pour dérivée $\frac{1}{2\sqrt{x}}$)

Il s'agit bien d'un milieu dispersif car $v_g = \dots\dots\dots$

Exemple 2 : Les ondes lumineuses

La définition de l'indice reste presque la même :

$$\boxed{n = \frac{c}{v_{\dots}}}$$

mais $n = \dots\dots\dots$ car $v_\varphi = \dots\dots\dots$

Comme souvent en optique, on préfère la longueur d'onde dans le vide à la pulsation et il existe un modèle qui est la formule de Cauchy :

$$n = n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2} \text{ donc } v_\varphi(\lambda) = \frac{c}{n(\lambda)}. \text{ La vitesse de l'onde dépend de la longueur d'onde.}$$

Les constantes A et B dépendent du milieu traversé : air, verre, eau.

La dispersion $\dots\dots\dots$ est un autre problème qui peut limiter la bande passante dans les fibres optiques comme la dispersion $\dots\dots\dots$ vue au 1^{er} chapitre.

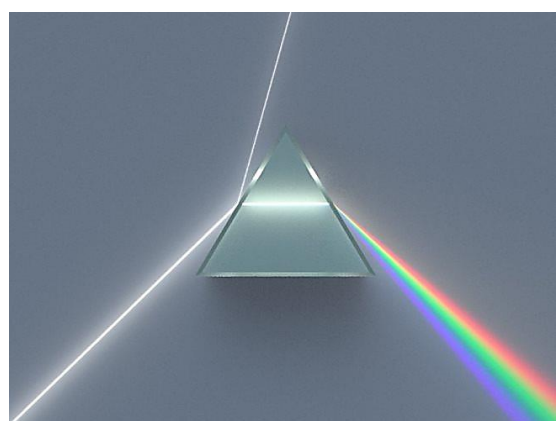


Table des matières

I . Phénomènes ondulatoires.....	2
II . Ondes progressives.....	3
A . Propagation linéaire non dispersive.....	4
1 . Propagation dans le sens des x croissants	5
2 . Propagation dans le sens des x décroissants	6
B . Sources monochromatiques.....	6
C . Ondes sinusoïdales.....	7
1 . Avance et retard.....	8
2 . Double périodicité.....	8
III . Interférences optiques	10
A . Superposition de deux signaux	10
1 . Démonstration vectorielle.....	10
2 . Interférences particulières.....	11
B . Trous d'Young (1801).....	12
1 . Intensité lumineuse et déphasage	12
2 . Différence de chemin optique	13
3 . Franges brillantes et franges sombres	14
IV . Signaux périodiques.....	15
A . Valeur moyenne.....	15
B . Valeur efficace	16
C . Série de Fourier.....	17
D . Milieux dispersifs	18
Table des matières.....	20