Chapitre V
Mécanique des rotations

Ce chapitre introduit la notion de ………….. par rapport à un point ou par rapport à un axe nécessaire pour expliquer les mouvements de rotation.

Relire le chapitre I Cinématique du point

Grandeurs physiques vectorielles :

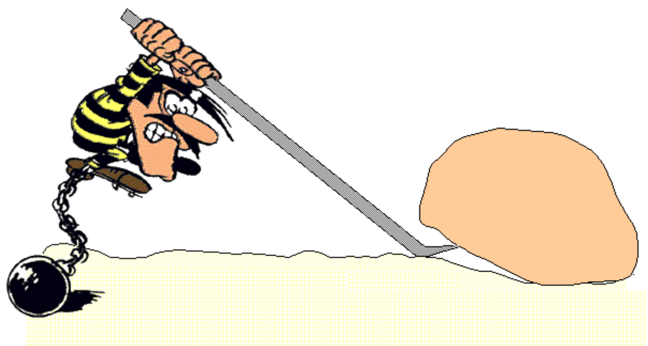
Grandeur physique	Symbole	Expression	Unité	Dimension
	$\vec{L}, \overrightarrow{L_O}, \overrightarrow{\sigma_O}$			$M.L^2.T^{-1}$
	$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}$			$M.L^2.T^{-2}$

I . Moments en mécanique du point

Problème : Joe Dalton est parvenu à s'évader en soulevant un rocher de $m_P = 320\,\text{kg}$ à la seule force de son poids de masse $m_J = 50\,\text{kg}$ pour récupérer la clé de ses chaînes qui se trouvait en dessous. Il a utilisé un pied de biche de 1 m de longueur plus 10 cm courbé d'un angle de 120°. L'angle initial du pied de biche avec le sol est 45°. Comment est-ce possible ?

A . Bras de levier

On fait coïncider l'origine O d'un repère cartésien avec le point de contact entre le pied de biche et le sol. On suppose que le pied de biche peut tourner autour d'un axe Oz de sorte que ses extrémités J, P restent dans un plan xOy.



$m_J < m_P \quad \Leftrightarrow \qquad\qquad \Leftrightarrow$

De toute évidence, le poids de Joe ne peut pas compenser celui de la pierre, il faut donc tenir compte des .... des forces J,P et de .... des forces.

Soient (D_J) et (D_P) les **............................** des forces $\overrightarrow{P_J}$ et $\overrightarrow{P_P}$ *i.e.* les droites dont les forces sont les vecteurs directeurs. Soient d_J et d_P les **.........................** des forces *i.e.* les longueurs entre les droites d'action et.. .... autrement dit le point O.

$d_J =$ et $d_P =$

Avec $\alpha =$

Or $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right) =$

Donc $d_P = \ldots\ldots \times \dfrac{\sqrt{\ldots}\left(1+\sqrt{\ldots}\right)}{4} = \dfrac{\sqrt{\ldots}\left(1+\sqrt{\ldots}\right)}{40} \approx \ldots\ldots\ldots$ cm

Le produit "force $\times$ bras de levier" est ....

Soit le moment du poids de Joe par rapport à l'axe Oz noté $\mathcal{M}_{Oz}\left(\overrightarrow{P_J}\right)$:

…

Soit le moment du poids de la pierre par rapport à l'axe Oz noté $\mathcal{M}_{Oz}\left(\overrightarrow{P_P}\right)$:

… donc $\left|\mathcal{M}_{Oz}\left(\overrightarrow{P_J}\right)\right| \quad \left|\mathcal{M}_{Oz}\left(\overrightarrow{P_P}\right)\right|$

En tenant compte des bras de levier, le rapport de force se trouve ...., le poids de Joe est certes plus faible que celui de la pierre mais le moment de force de son poids par rapport à l'axe de rotation est .... que celui de la pierre, il parvient donc à la déplacer.

B . Moment d'une force

De manière générale, le moment d'une force par rapport au point origine O est le produit vectoriel entre le vecteur-position du **.............................** M et la force qui s'y applique :

$\boxed{}$ (sa norme $\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{F}\right)\right\|$ s'exprime en N.m) vue du plan $\perp (\Delta)$ vue du plan $\perp \vec{F}$

> ➢ ***direction :***
>
> ➢ ***sens :***
>
> ➢ ***norme :***

Le moment d'une force par rapport à l'axe de rotation (Δ) s'écrit :

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ (produit mixte, $O \in \Delta$)

C'est le produit .... entre le moment d'une force par rapport à un point O de l'axe (Δ) qui est un produit .... et un .... unitaire $\overrightarrow{e_\Delta}$ directeur de (Δ), c'est aussi la .... selon $\overrightarrow{e_\Delta}$ *i.e.* la projection du moment par rapport à un point de l'axe (Δ).

Si le moment est unidirectionnel : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) =$

➢ Si $(\overrightarrow{OM}, \vec{F}) \in [0, \pi]$ alors $\sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F})$ 0 et d'après la règle du tire-bouchon :

$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})$ est selon donc $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = OM \times F \times + \sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F}) \times + \overrightarrow{e_\Delta}$

➢ Si $(\overrightarrow{OM}, \vec{F}) \in [-\pi, 0]$ alors $\sin(\overrightarrow{OM}, \vec{F})$ 0 et d'après la règle du tire-bouchon :

$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})$ est selon donc $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) =$

Puisque $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) =$, on en conclut que :

$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$ (même calcul chapitre IV page 12)

@Sagredo Le moment de force par rapport à un axe est bien homogène à une énergie car $\mathrm{N.m} = \mathrm{kg.m^2.s^{-2}}$ mais ce n'est pas une énergie pour autant car ce sont en fait des **J.rad⁻¹**.

C . Equilibre des moments

Retour sur le problème, $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{P_J}\right) =$ et $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{P_P}\right) =$

D'après la règle du tire-bouchon, $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{P_J}\right)$ est selon alors que $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{P_P}\right)$ est selon .

Par projection selon l'axe Oz du problème correspondant à l'axe (Δ) du cas général :

$\mathcal{M}_{Oz}\left(\overrightarrow{P_J}\right) =$ avec $\left(\overrightarrow{OJ}, \overrightarrow{P_J}\right) > 0$

Or car $\left(\overrightarrow{P_J}, \overrightarrow{JO}\right) > 0$.

Donc $\mathcal{M}_{Oz}\left(\overrightarrow{P_J}\right) =$

$\mathcal{M}_{Oz}\left(\overrightarrow{P_P}\right) =$ avec $\left(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{P_P}\right) < 0$

Or car $\left(\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{P_P}\right) > 0$

Donc $\mathcal{M}_{Oz}\left(\overrightarrow{P_P}\right) =$

On retrouve les expressions de la page 2 : la .... du moment par rapport à un **axe** est le produit de la .... de la **force** par le ....

Pourquoi le moment de la pierre est négatif et pas le moment du poids de Joe ?

Le poids de la pierre favorise une rotation autour de l'axe Oz dans le sens .... *i.e.* dans le sens des angles négatifs. Le poids de Joe favorise une rotation autour de l'axe Oz dans le sens .... *i.e.* dans le sens des angles positifs.

Les moments sont en compétition pour orienter la rotation :

- Si $\left|\mathcal{M}_{Oz}\left(\overrightarrow{P_J}\right)\right| > \left|\mathcal{M}_{Oz}\left(\overrightarrow{P_P}\right)\right|$ alors la rotation est dans le sens ....
- Si $\left|\mathcal{M}_{Oz}\left(\overrightarrow{P_J}\right)\right| <$
- Si alors le pied de biche est à l'équilibre de rotation :

$\boxed{}$ et par projection sur l'axe de rotation : $\boxed{}$

Salviati : Ce n'est pas un principe d'inertie mais un équilibre des rotations, une résultante des moments nulle ne signifie ni immobilité, ni MRU, ni mouvement circulaire uniforme.

D . Moment cinétique d'un point

Que deviennent les lois de la mécanique avec ces moments de forces ?
Soit la loi de la quantité de mouvement dans un référentiel galiléen :

$$\frac{d\vec{p}(M)}{dt} = \sum_{forces} \overrightarrow{F_{ext}}(M)$$

On fait un produit vectoriel avec chaque membre :

➢ Dans le membre de gauche, on cherche à faire apparaître :

où $\overrightarrow{u_1} = \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{u_2} = \vec{p}(M)$ par analogie avec $u'v + uv' = (uv)'$

On rajoute astucieusement le premier terme manquant :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \frac{d\vec{p}(M)}{dt} =$$

$$=$$

➢ Dans le membre de droite, on développe le produit et on reconnaît les moments :

…

somme de tous les moments par rapport au point O des forces appliquées au point M

En combinant les 2 termes, on aboutit à :

On introduit donc une nouvelle grandeur appelée **moment cinétique** qu'on définit par :

(norme en kg.m^2.s^{-1}).

C'est le moment cinétique du point M par rapport au point O, ………………………………
………………………………………………………………… *i.e.* le produit masse vitesse.

➢ ***direction :***

➢ ***sens :***

➢ ***norme :***

Salviati : On le note aussi $\overrightarrow{\sigma_O}(M)_R$ ou juste $\vec{L}$. De façon condensé, $L =$

➢ Pour un mouvement **circulaire** de rayon r de centre O, $\overrightarrow{OM} = \ldots\overrightarrow{e_r}$ et $\vec{v} = \ldots\ldots\overrightarrow{e_\theta}$ donc :

$\overrightarrow{OM}$ $\quad \vec{v}$ et $\sin\left(\overrightarrow{OM},\vec{v}\right) =$ donc $L =$

Pour un mouvement **rectiligne** selon un axe Ox, $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{e_x}$ et $\vec{v}=\dot{x}\overrightarrow{e_x}$ donc :

$\overrightarrow{OM}$ $\vec{v}$ et $\sin\left(\overrightarrow{OM},\vec{v}\right)=$ donc $\boxed{L=\dots}$ et $\boxed{\vec{L}=\dots}$

Le moment cinétique est ……… lorsque le système ne tourne pas.

Le moment cinétique par rapport à l'axe de rotation (Δ) s'écrit :

$\boxed{}$ (produit mixte, $O\in\Delta$)

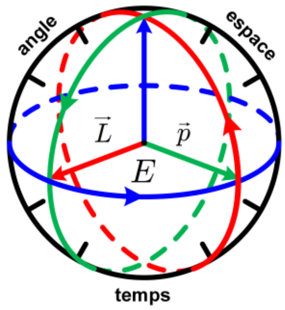
C'est le produit **scalaire** entre le ……………………… par rapport à un point O de l'axe (Δ) qui est un produit **vectoriel** et un **vecteur** unitaire $\overrightarrow{e_\Delta}$ directeur de (Δ), c'est aussi la **coordonnée** selon $\overrightarrow{e_\Delta}$ *i.e.* ………………………………………………………………………

> **Le moment par rapport à un point est un ……………… ($\overrightarrow{\mathcal{M}_O}$ ou $\overrightarrow{L_O}$)**
>
> **Le moment par rapport à un axe est un ……………… ($\mathcal{M}_\Delta$ ou L_Δ)**

Culture scientifique :

Le théorème de Noether démontrée en 1915 par Emmy Noether (1882–1935) établit que toute symétrie d'une expérience implique la conservation d'une grandeur fondamentale.

Symétrie	Grandeur conservée
translation du temps t	énergie E
translation de l'espace x,y,z	impulsion $\vec{p}$
rotation de l'espace θ,φ,ψ	moment cinétique $\vec{L}$



Ces 3 grandeurs sont considérées comme les plus fondamentales de toute la physique.

E . Théorème du moment cinétique (TMC)

L'encadré de milieu de page précédente obtenu après démonstration donne donc :

$\boxed{}$ (TMC par rapport à un point O)

Sous la forme projetée sur l'axe de rotation en faisant un produit scalaire avec $\overrightarrow{e_\Delta}$:

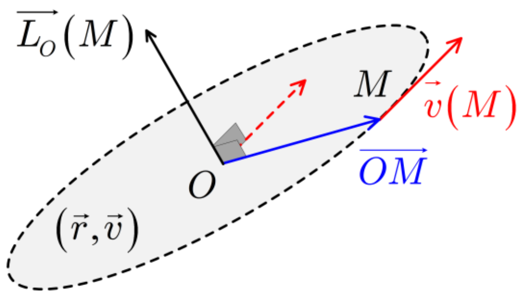
$\boxed{}$ (TMC par rapport à un axe Δ)

Si $\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{cste}$ alors on retrouve l'équilibre de rotation :

Lorsque $\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{cste}$, le plan $(\vec{r}, \vec{v})$ reste .... à tout instant car $\overrightarrow{L_O} \perp \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{L_O} \perp \vec{v}$ à tout instant.

Donc le point M .... définie par sa position et sa vitesse à tout instant.

On a donc l'implication suivante :



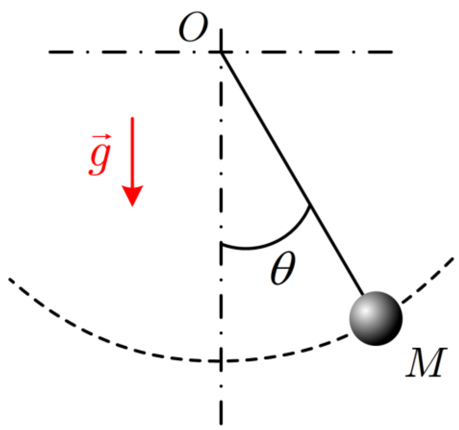
La réciproque est **fausse** : un mouvement plan n'implique rien concernant la somme des moments, le pendule simple est plan pourtant, il est soumis à des moments non nuls.

II . Applications en mécanique du point

Le théorème du moment cinétique est très utile pour décrire le mouvement d'un point M tournant autour d'un axe .... donc pour les mouvements ...., il peut permettre aussi de démontrer rapidement que le mouvement est ....

A . Le pendule simple (3ème partie)

On s'intéresse à nouveau au problème du pendule simple de longueur L de masse m. $\overrightarrow{OM} = L\overrightarrow{e_r}$, $\vec{v} = L\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta}$.



Système : ....

Référentiel : ....

Repère : $(O, \overrightarrow{e_{...}}, \overrightarrow{e_{...}}, \overrightarrow{e_z})$.

Bilan des moments de force :

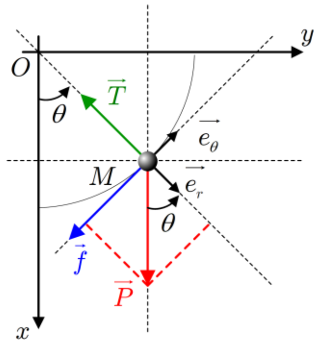
Le point M est soumis à ....

➢ $\vec{P} =$ d'où :

$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) =$

➢ $\vec{T} =$ d'où : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{T}) =$

➢ $\vec{f} =$ d'où : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{f}) =$



On calcule le moment cinétique : $\overrightarrow{L_O}(M) =$

Lorsque $\dot{\theta} > 0$, $\theta \nearrow$, la rotation est dans le sens ...., $\overrightarrow{L_O}$ est selon .

Règle du tire-bouchon :

- Si le moment cinétique est selon , la rotation a lieu dans le sens **trigonométrique**.
- Si le moment cinétique est selon , ...
- Si le moment cinétique est nul, il n'y a pas de rotation, le mouvement est ....

Théorème du moment cinétique : $\frac{d\overrightarrow{L_O}(M)}{dt} = \sum_{forces} \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{P}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{T}\right) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\left(\vec{f}\right)$

La rotation se faisant autour de l'axe Oz :

D'où

On retrouve rapidement l'équation du pendule simple vérifiée par l'angle θ dans le cas des frottements (2nd ordre, ..., coeff. constants, sans second membre)

1 . Mouvement conservatif à 1D

En négligeant les frottements, $\alpha = 0$, et avec l'approximation des petits angles, $\sin\theta \approx \theta$:

$\boxed{} \Leftrightarrow$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$

Avec des conditions initiales habituelles telles que $\theta(t=0) = \theta_0$, $\dot{\theta}(t=0) = 0$:

$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \quad \Rightarrow$

TMC : $\frac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}\left(\vec{P}\right)$ car $\mathcal{M}_{Oz}\left(\vec{T}\right) = 0$ et $\mathcal{M}_{Oz}\left(\vec{f}\right) \approx 0$

A l'instant initial, $\mathcal{M}_{Oz}\left(\vec{P}\right) =$ donc $\frac{dL_{Oz}}{dt}$ 0 $\Rightarrow$

Or à $t = 0$, $L_{Oz} = 0$ donc L_{Oz} 0 donc $\overrightarrow{L_O}$ sera selon donc rotation en sens ....

A la demi-période, $\mathcal{M}_{Oz}\left(\vec{P}\right) =$

Or à $t =$

Un peu de la même façon que la compétition entre moments décrite fin de la page 4 :

- Si $\mathcal{M}_{Oz}\left(\vec{F}\right) > 0$ alors la rotation se fera dans le sens .... du plan xOy.
- Si

2 . Rappel des méthodes de calcul

↳ On choisit le système, le référentiel, le repère

↳ $\overrightarrow{OM} = L\overrightarrow{e_r} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = L\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = -L\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_\theta} + L\ddot{\theta}\overrightarrow{e_r}$

- Chapitre II page 17 : Principe fondamental de la dynamique (PFD)

↳ On établit le ....

↳ On applique la 2ème loi de Newton : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{P} + \vec{T} + \vec{f}$

↳ On projette selon les axes : $\begin{cases} \text{selon } \overrightarrow{e_r} : -mL\ldots = -T + mg\cos\theta \\ \text{selon } \overrightarrow{e_\theta} : mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta - \alpha\ldots\ldots \end{cases}$

↳ On s'intéresse à la 2ème équation qu'on divise par mL : $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0}$

- Chapitre III page 19 : Théorème de la puissance mécanique (TPM)

↳ On définit l'énergie mécanique : $E_m = E_C + E_{PP} =$

↳ On dérive par rapport au temps : $\dfrac{dE_m}{dt} = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\sin\theta\dot{\theta}$

↳ On applique le théorème de la puissance mécanique : $\dfrac{dE_m}{dt} = \qquad = \qquad = -\alpha L^2\dot{\theta}^2$

↳ On identifie la dérivée de l'énergie mécanique : $-\alpha L^2\dot{\theta}^2 = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\sin\theta\dot{\theta}$

↳ On divise par $mL^2\dot{\theta}$: $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0}$

- Chapitre V page 8 : Théorème du moment cinétique (TMC)

↳ On établit le ....

↳ On applique le TMC :

↳ On projette sur l'axe de rotation : $\dfrac{dL_{Oz}}{dt} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{P}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{T}) + \mathcal{M}_{Oz}(\vec{f})$

↳ On calcule la dérivée du moment cinétique :

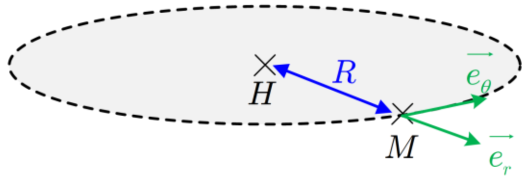
↳ On divise par mL^2 : $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{\theta} + \dfrac{g}{L}\sin\theta = 0}$

On obtient bien la même équation différentielle quelle que soit la méthode.

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) est pratique pour étudier les mouvements rectilignes et le théorème du moment cinétique (TMC) pour étudier les ....

B . Un point d'analyse vectorielle

Soit un point M en mouvement circulaire de rayon R et de centre H .



On peut toujours définir une base polaire telle que $\overrightarrow{e_r} = \dfrac{\overrightarrow{HM}}{HM}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ vecteur unitaire orthogonal à $\overrightarrow{e_r}$ avec θ l'angle ....

1 . Vecteur-vitesse angulaire

On peut considérer H comme le projeté de M sur un axe orthogonal au cercle décrit par le point M noté (Δ) et de vecteur unitaire directeur $\overrightarrow{e_\Delta}$. Si l'angle θ est défini comme .... lorsque le point M va dans le sens **trigonométrique** alors :

Le mouvement circulaire est équivalent à une ....

On sait que et que $\vec{v}(M) =$

Soit O un point origine appartenant à l'axe de rotation (Δ) .

$\vec{v}(M) =$ car $\overrightarrow{e_\Delta} // \overrightarrow{HO}$.

On définit le .... : $\boxed{}$ avec $\omega = \omega(t) = \dot{\theta}(t)$

Pour une rotation autour d'un axe fixe (Δ) , $\boxed{}$ avec $O \in (\Delta)$

Salviati : **@Sagredo** Attention à la notation ω , on l'a souvent vu comme une constante en électricité avec la pulsation ou avec la vitesse angulaire $\dot{\theta} = cste = \omega$. En mécanique du solide, elle vaut exactement la vitesse angulaire : $\dot{\theta}(t) = \omega(t)$ (voir chapitre VII).

Pour 2 points A et B , $\vec{v}(B) =$ (relation de Chasles)

En développant : $\Leftrightarrow$

Dans le cas où O n'est pas sur l'axe, on aura quand même $\boxed{}$ avec $O \notin (\Delta)$

2 . Produit mixte et puissance

Un produit ………… s'écrit : où $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ sont des vecteurs quelconques, constants ou pas. C'est le produit ……………… entre un produit **vectoriel** et un vecteur.

Le moment d'une force et le moment cinétique par rapport à (Δ) sont des produits mixtes :

$$\mathcal{M}_\Delta\left(\vec{F}\right)=\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}(M)\right).\vec{e_\Delta} \text{ et } L_\Delta(M)=\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}(M)\right).\vec{e_\Delta}$$

Le produit mixte est …………………… car c'est un produit scalaire : $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right).\vec{A}$

Mais il est aussi **anti-commutatif** à cause du produit vectoriel :

Il est ……………………………………………………… ABCABC ou xyzxyz :

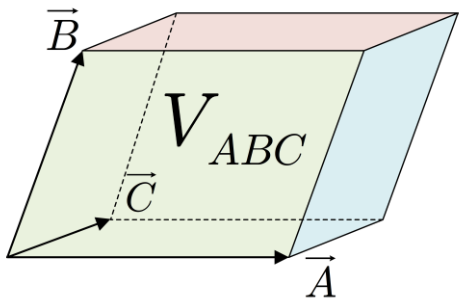
$$\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=\vec{B}.\left(\vec{C}\wedge\vec{A}\right)=\vec{C}.\left(\vec{A}\wedge\vec{B}\right) \text{ ou}$$

On a donc $L_\Delta(M)=$

Dans une base orthonormée $\left(\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z}\right)$, $\vec{A}.\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)=$

On reconnaît le ……………………… de la matrice :

$$\begin{pmatrix} A_x & A_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ A_z & B_z & C_z \end{pmatrix}$$



On peut montrer que le "…………" défini par 3 vecteurs $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ correspond aussi au produit mixte. Le produit mixte relie donc 3 domaines : ………………………………………………………………………

La puissance d'une force associée à un point en rotation autour d'un axe fixe s'écrit :
$\mathcal{P}\left(\vec{F}\right)=$

La puissance d'une force pour une rotation autour d'un axe fixe apparaît comme …………… ……

On pourra en déduire le travail élémentaire : $\delta W\left(\vec{F}\right)=$

Un moment de force a la même dimension qu'une énergie : N.m = J.rad^{-1}.

3 . Double-produit vectoriel

Il ne faut pas confondre le produit mixte avec le **double produit vectoriel** : $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ car le produit mixte est un produit scalaire alors que le double produit est un vecteur.

On démontre que $\vec{A}\wedge\left(\vec{B}\wedge\vec{C}\right)$ est égal à une différence des vecteurs $\vec{B}$ et $\vec{C}$ pondérés par des produits scalaires $\vec{C}.\vec{A}$ et $\vec{B}.\vec{A}$ qui sont des **scalaires** *i.e.* juste des nombres.

(rappel mnémotechnique : “cab – bac”)

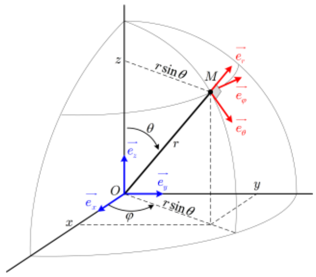
Pour une rotation autour d’un axe fixe (Δ) dont le point origine O est centre du cercle :

$$\overrightarrow{L_O}(M)=\overrightarrow{OM}\wedge\vec{p}(M)=$$

$\Rightarrow$ …

$\overrightarrow{L_O}(M)=mR^2\vec{\omega}=mR^2\dot{\theta}\overrightarrow{e_\Delta}$. On retrouve l’expression déjà rencontrée page 8.

C . Mouvement à force centrale



On appelle **mouvement à force centrale** le mouvement d’un point matériel M soumis ………………………………………………………
………………………………………………………………………………
………………………………………………………………………………

On se place dans une base sphérique $\left(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_\varphi}\right)$ où $\overrightarrow{e_r}$ est un vecteur unitaire qui n’appartient pas nécessairement au plan xOy (chapitre I page 15).

Le point M est décrit à chaque instant par son vecteur-position $\overrightarrow{OM}=r\overrightarrow{e_r}$ où r est la distance OM et non la distance OM' comme dans le repère cylindrique.

Une **force centrale** est telle que : $\boxed{\vec{F}=\quad\quad\quad}$ où $F(r)=F_r$ est sa coordonnée selon $\overrightarrow{e_r}$ ne dépendant que de r *i.e.* ne dépendant que de la distance OM et ni de θ, ni de φ.

Les forces de ……………… et de ……………… sont des forces centrales.

1 . Moment de forces

➢ Pour 2 charges q et q' **de même signe** l’une placée en O et l’autre placée en M :

↳ force répulsive : $F(r)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq'}{r^2}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{|q||q'|}{r^2}$ avec $qq'>0$ et donc $\left\|\vec{F}\right\|=F(r)$

➢ Pour 2 charges q et q' **de signe …………..** ……………………………………………… :

↳ force ………………… : $F(r)=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{qq'}{r^2}=$

➢ Pour 2 masses m et m' l’une placée en O et l’autre placée en M :

↳ force forcément attractive : $F(r)=$ avec $mm'>0$ et donc $\left\|\vec{F}\right\|=$

On s'intéresse uniquement à la force attractive en posant $\vec{F} =$ avec $\|\vec{F}\| =$

où $K =$ pour la gravitation et $K = \frac{}{}$ pour l'électrostatique en ....

Le moment de cette force par rapport à O pour un point M de masse m s'écrit :

$$\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M) = \ldots \vec{e_{\ldots}} \wedge -\frac{\ldots}{r^{\ldots}} \vec{e_{\ldots}} = \ldots \text{ car } \vec{e_r} \wedge \vec{e_r} = \vec{0}.$$

Le moment d'une force centrale par rapport à O est toujours ....

2 . Moment cinétique

D'après le théorème du moment cinétique :

(page 7)

D'où $\vec{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{p}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\vec{v}(M) = \overrightarrow{cste}$. On a donc aussi $L =$

Le moment cinétique par rapport au point fixe O est une .... à force centrale, il se conserve au cours du temps dans un référentiel galiléen pour un point M soumis uniquement à une force centrale. Si le moment cinétique $\vec{L_O}$ est constant alors le plan qui contient $\overrightarrow{OM}$ et $\vec{v}(M)$ et qui lui est donc orthogonal est .... Puisque la position et la vitesse de M reste donc dans ce plan alors la trajectoire aussi.

Un mouvement à force centrale est donc ....

On ramène donc le problème à force centrale, des coordonnées **sphériques** aux coordonnées .... en faisant coïncider l'axe Oz avec la direction du moment cinétique de sorte que la trajectoire du point M soit contenue dans le ....

Salviati : On peut passer d'un repère à un autre s'il est plus facile à utiliser sans pour autant changer de référentiel qui peut être pour une force centrale le centre du Soleil si on étudie la Terre ou le noyau d'un atome si on étudie un électron lié à cet atome.

Les vecteurs position et vitesse étant orthogonaux à $\vec{L_O}(M)$ et donc à Oz alors ils appartiennent aussi au plan xOy tels qu'en coordonnées polaires :

$\overrightarrow{OM} = r\vec{e_r}$ et $\vec{v}(M) = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ ($z = 0$, $\dot{z} = 0$, $\ddot{z} = 0$ car le mouvement est **plan**)

D'où $\vec{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge$

Le signe de la coordonnée L_z selon Oz du moment cinétique est donné par la .... : si la rotation est ...., $L_z = mr^2\dot{\theta} < 0$ car $\dot{\theta} < 0$, sinon, $L_z = mr^2\dot{\theta} > 0$.

Table des matières