Chapitre III
Approche énergétique

L'approche énergétique est une alternative à la 2ème loi de Newton pour des systèmes à un .... : une direction x, un angle θ. Elle permet d'établir une équation du mouvement parfois plus simplement et d'interpréter les phénomènes plus rapidement. Lorsque le problème fait intervenir plusieurs inconnues : forces de frottement, tension d'un fil, réaction du support, etc…, les théorèmes énergétiques permettent d'obtenir une équation supplémentaire à la 2ème loi de Newton permettant de déterminer les inconnues.

Collège (cycle 4)

- **Énergie cinétique** (relation $E_C = ½ mv^2$)
- Énergie potentielle dépendant de la position, thermique, électrique, chimique, nucléaire, lumineuse.
- Établir un bilan énergétique pour un système simple.
- Notion de puissance. Relation liant **puissance**, énergie et durée.

Première (spé)

- Énergie cinétique d'un système modélisé par un point matériel.
- **Travail** d'une force. Expression du travail dans le cas d'une force constante.
- Utiliser l'expression du travail $W_{AB}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}.\overrightarrow{AB}$ dans le cas de forces constantes.
- **Théorème de l'énergie cinétique**. Énoncer et exploiter le théorème de l'énergie cinétique.
- **Forces conservatives. Énergie potentielle**. Cas du champ de pesanteur terrestre.
- Énergie potentielle de pesanteur pour un système au voisinage de la surface de la Terre.
- Forces non-conservatives : exemple des frottements. Gain ou dissipation d'énergie.
- **Énergie mécanique**. Conservation et non conservation de l'énergie mécanique.

Terminale (ES)

- Comparer quelques ordres de grandeur d'énergie et de puissance.

Grandeurs physiques :

Grandeur physique	Symbole	Unité (Unité S.I.)	Dimension	Apparition
force	$\vec{F}$	… (…………..)	$M\,L\,T^{-\cdots}$	Cycle 4 (3ème)
travail, énergie	W, E	… (…………..)	$M\,L^{\cdots}\,T^{-\cdots}$	Cycle 4 (3ème)
puissance	$\mathcal{P}$	… (…………..)	$M\,L^{\cdots}\,T^{-\cdots}$	Cycle 4 (3ème)
constante gravitationnelle	G		$L^3\,M^{-1}\,T^{-2}$	Cycle 4 (3ème)

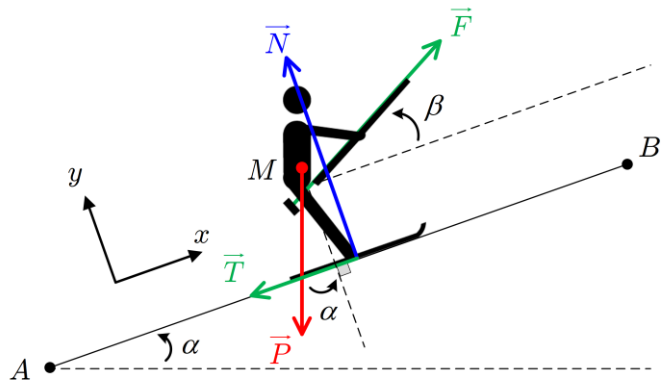
S.I. : T : temps, L : longueur, M : masse, I : intensité, Θ : température, N : quantité de matière

MATHS
- Produit scalaire, intégrales, **dérivées partielles**, différentielles, **gradient**

Hyp. 1 : Tous les systèmes de ce chapitre seront assimilés à leur centre de gravité.

I. Puissance, travail et énergies

Soit un skieur tracté par un remonte-pente sur une pente d'inclinaison $\alpha > 0$.
On l'assimile à un point M de masse m et de vitesse $\vec{v}(M) = v_x\vec{e_x} = v\vec{e_x}$ car $v_x > 0$.



Salviati : Le choix judicieux du repère incliné comme la pente, facilite évidemment l'étude.

A. Puissance d'une force

➢ *Bilan des forces :*

✓ *Poids :* $\vec{P} =$ avec $P = \left\|\vec{P}\right\| = mg$

✓ *Force de ……………… :* $\vec{F} =$ avec $F = \left\|\vec{F}\right\|$ norme de cette force

✓ *Réaction de ……………… :* $\vec{R} =$ avec $N > 0$ et $T > 0$

réaction	adjectif	expression	cause
			frottement solide de la neige
			3ème loi de Newton
			mouvement plan

1. Puissance de la force de traction

La puissance d'une force est le produit scalaire entre le vecteur-force et le vecteur-vitesse, elle dépend du référentiel choisi : …

Plus la force ou plus la vitesse est grande, plus la puissance est importante.

Dans le cas général, $\mathcal{P}\left(\vec{F}\right) =$ et $\mathcal{P}\left(\vec{F}\right) =$

L'angle $\left(\vec{F}, \vec{v}\right)$ est orienté *i.e.* $\left(\vec{F}, \vec{v}\right) = -(\ldots, \ldots)$ mais ça n'a pas d'importance sur le produit scalaire car cosinus est une fonction ……… Le produit scalaire est commutatif : $\vec{F}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{F}$

Pour le skieur,

- Si $\beta=\dfrac{\pi}{2}$, $\cos\beta=\ldots$ alors $\vec{F}$ est selon $\overrightarrow{e_{\ldots}}$ et $\mathcal{P}\left(\vec{F}\right)=\ldots$: ....
- Si $\beta=0$, $\cos\beta=\ldots$ alors $\vec{F}$ est selon $\overrightarrow{e_{\ldots}}$ et $\mathcal{P}\left(\vec{F}\right)=\ldots\ldots=\ldots\ldots$: ....

$$\text{Comme } 0<\beta<\frac{\pi}{2},\ \ldots<\cos\beta<\ldots \text{ donc } \mathcal{P}\left(\vec{F}\right)\ldots 0$$

La puissance fournie au skieur par le remonte-pente est **.................** et se mesure en W.

2 . Puissance des autres forces

Concernant le poids, $\mathcal{P}\left(\vec{P}\right)=$ car $\alpha>0$

La composante **..........................** du poids s'oppose au mouvement car sa puissance est **..............** *i.e.* négative. Si la pente était une descente, $\alpha\ldots\ldots$ alors $\ldots$. Dans ce cas, le poids favoriserait le mouvement en apportant naturellement de la puissance au système.

Concernant la réaction de la neige, $\ldots$

Grâce à la distributivité du produit scalaire, la puissance est une grandeur ....

$$\mathcal{P}\left(\vec{N}\right)= \qquad \text{car } \overrightarrow{e_y}.\overrightarrow{e_x}=\ldots \text{ puisque } \overrightarrow{e_y}\ldots\overrightarrow{e_x}$$

La puissance de la réaction normale est .... car la réaction est justement normale.

$$\mathcal{P}\left(\vec{T}\right)=$$

La puissance de la réaction tangentielle est .... puisqu'elle est due aux frottements avec la neige qui dissipent l'énergie et s'opposent au mouvement du skieur.

B . Travail d'une force

Une distance infinitésimale s'écrit $d\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{v_R}(M)\,dt=\vec{v}\,dt$ (voir Chapitre I page 5).

En électricité, on a défini la puissance comme la dérivée de l'énergie : $p(t)=\dfrac{dE(t)}{dt}$.

Une énergie infinitésimale dE peut donc s'écrire $dE(t)=p(t)dt$.

Travail infinitésimal d'une force : $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$

Le travail W_{AB} d'une force $\vec{F}$ sur un chemin AB ou pendant une durée $\Delta t=t_B-t_A$ s'écrit :

$$\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Salviati : Il faut toujours indiquer les bornes d'une intégrale en physique afin de savoir sur quoi on intègre. Si les bornes d'une intégrale sont mal définies comme pour δW alors on indique quand même l'état de départ A et l'état d'arrivée B.

Si la force est **constante** comme le poids $\vec{P} = \overrightarrow{cste}$, alors $W_{AB}\left(\vec{P}\right) =$

En posant $AB = L$, $W_{AB}\left(\vec{P}\right) =$

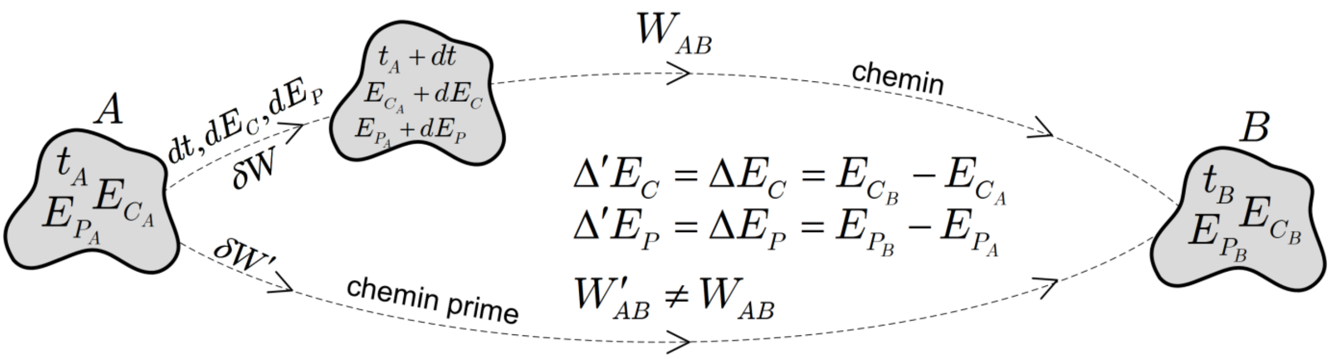
Ou plus rapidement, $W_{AB}\left(\vec{P}\right) = \begin{vmatrix} \dots \\ \dots \\ \dots \end{vmatrix}$ < 0 car $\alpha > 0$

Si $\mathcal{P}\left(\vec{F}\right) > 0$ alors $\delta W\left(\vec{F}\right)\dots\dots$ puisque $dt\dots\dots$ donc $W_{AB}\left(\vec{F}\right)\dots\dots$

Une puissance motrice implique un travail .... et une puissance résistante, un travail .... donc pour le skieur, le travail de la force de traction est .... tandis que le travail du poids est .... Lorsque la puissance est nulle, le travail est **nul** aussi donc le travail de la réaction normale est nul, on dit la réaction normale ....

$W_{AB}\left(\ \dots \ \right) > 0$ $\qquad W_{AB}\left(\ \dots \ \right) < 0$ $\qquad W_{AB}\left(\ \dots \ \right) = 0$

Exemple : Le skieur se trouve en A et il doit arriver au sommet de la pente en B.
On suppose qu'il existe 2 remonte-pentes qui vont de A à B par des chemins différents mais proposant la **même durée** de trajet, l'état initial et l'état final étant **les mêmes**.



Le parcours n'étant pas le même, le travail W ne sera pas le même, on dit que le travail ...., cela implique l'utilisation du ... pour la différentielle. A l'inverse, la plupart des grandeurs sont définis en un état, ce sont des .... ou ...., cela implique l'utilisation du ... pour leurs différentielles.

Pour le frottement : $\delta W_{AB}\left(\vec{T}\right) =$ car $dx > 0$

Si le skieur descendait, $dx\dots\dots$ mais le frottement s'opposerait au mouvement : $\vec{T} =$

Donc $\delta W_{BA}\left(\vec{T}\right) =$ Le travail des frottements serait toujours résistant.

C . Théorème de la puissance cinétique (TPC)

L'énergie cinétique d'un système de masse m s'écrit : $\boxed{E_C = \qquad\qquad = \frac{1}{2}mv^2}$

Le produit scalaire de la vitesse par elle-même vaut : $\vec{v}.\vec{v} = \Bigg\{$

On suppose que la masse m d'un point M est constante, la 2ème loi de newton donne :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \qquad = \sum_{forces} \overrightarrow{F_{ext}}$$

L'astuce consiste à faire le produit scalaire de chaque membre :

Dans le membre de gauche, on reconnaît la forme uu' qui est la dérivée de $u^2/2$:

En effet, $\frac{d\left(v^2\right)}{dt} =$ donc :

… On reconnaît l'…………………………

Dans le membre de droite, on développe le produit :

… On reconnaît les ……………………

D'où le théorème des forces vives : $\boxed{\qquad\qquad\qquad\qquad}$ (TPC)

où $\mathcal{P}_{ext}$ est la résultante des puissances des forces extérieures

Salviati : Ce théorème et cette démonstration sont vrais seulement en mécanique du point car il n'y a qu'une vitesse, celle du système assimilé au point M. En mécanique du solide ou mécanique à plusieurs corps, il y aura plusieurs vitesses et il faudra rajouter $\mathcal{P}\left(\overrightarrow{F_{int}}\right)$.

Si la puissance est **…………** $\mathcal{P} > 0$, $\frac{dE_C}{dt} > 0$ donc $E_C \nearrow$, $v \nearrow$. Le mouvement ………………

Si la puissance est **………………** $\mathcal{P} < 0$,

Si la force **ne travaille pas**, $\mathcal{P} = \quad = \ldots$, $E_C = \ldots\ldots$, $v = \ldots\ldots$ Le mouvement est ……………

➢ Pour le skieur :

D . Théorème de l'énergie cinétique (TEC)

On multiplie le TPC par dt : $dE_C =$

D'où le théorème sous forme **infinitésimale** :

où δW_{ext} est la différentielle du travail total des forces extérieures

On intègre sur un chemin AB :

D'où le théorème sous forme **intégrale** : (Thomson, 1849)

- Pour le skieur :

La 2ème loi de Newton conduit à **une équation ....** soit 3 équations scalaires alors que le TEC ou TPC ne conduise qu'à **une seule équation ....**

II . Energie potentielle et énergie mécanique

Pour aller plus loin, il est nécessaire d'introduire un nouvel outil mathématique jamais vu au lycée qui va permettre de simplifier les démonstrations et qui s'utilise dans de multiples domaines de la physique où l'analyse vectorielle joue un rôle clé.

Relire la fiche thématique – les différentielles

A . Un point sur le gradient

A 1 variable, $f(x)$ est telle que sa différentielle s'écrit : $df(x) =$

A 2 variables, $f(x,y)$ est telle que sa différentielle s'écrit : $df =$

Exemples : Soient $r(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ où $(x,y) \neq (0,0)$ et $\theta(x,y) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$ où $\dfrac{y}{x} \in \mathbb{R}$

La dérivée de $\sqrt{u}$ est $\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ et la dérivée de $\arctan(u)$ est $\dfrac{u'}{1+u^2}$

Le dé rond "∂" n'est ni un dé droit "d", ni un delta "δ".

$$dr = \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)_x dy =$$

$$d\theta =$$

$f(x,y,z)$ est telle que sa différentielle s'écrit :

Ou plus rigoureusement :

$\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial z}$ sont les .... de f par rapport à x, y et z.

Soit f une fonction qui dépend d'une ou plusieurs coordonnées d'un point M alors :

où $\overrightarrow{\text{grad}} f$ est le **gradient** de f

Soit (g_x, g_y, g_z) les coordonnées de $\overrightarrow{\text{grad}} f$ tel que $\overrightarrow{\text{grad}} f =$

On sait que $\overrightarrow{dOM} = dx\vec{e_x} + dy\vec{e_y} + dz\vec{e_z}$ donc : $df =$

Par identification, $\ldots = \frac{\ldots}{\ldots}$, $\ldots = \frac{\ldots}{\ldots}$, $\ldots = \frac{\ldots}{\ldots}$ donc

Salviati : Le gradient est une sorte de généralisation à 3 dimensions de la dérivée :

$$df(x) = f'(x)dx \xrightarrow{1D \to 3D} df(x,y,z) = \overrightarrow{\text{grad}}\, f \,.\, \overrightarrow{dOM}$$

En coordonnées cylindriques : $\overrightarrow{\text{grad}} f =$ et sphériques : $\overrightarrow{\text{grad}} f =$

Les gradients sont différents selon la base car $\overrightarrow{dOM}$ est différent (voir chapitre I page 11).

B . Forces conservatives

Il existe deux types de forces s'appliquant sur un système : les forces **conservatives** pour lesquelles l'énergie mécanique est conservée lorsque le système n'est soumis qu'à cette force et les forces .... qui dissipent l'énergie mécanique du système.

Salviati : Séparer forces conservatives et forces non conservatives est une autre façon de distinguer les forces comme certaines forces sont intérieures et d'autres extérieurs.

Culture scientifique :
L'énergie mécanique était auparavant appelée “force absolue”, l'énergie cinétique “force vive” à un demi près et l'énergie potentielle “force morte”, termes introduits par Leibniz en 1686. Ces termes disparaissent avec William Thomson et William Rankine vers 1850.

1 . Définition de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique E_m d'un système est ....
qui composent le système *i.e.* la somme des énergies .... :

- A un instant donné t : $E_m =$
- Pendant une durée infinitésimale dt : $dE_m =$
- Pendant une durée globale Δt : $\Delta E_m =$

Lorsque la force est **conservative**, $E_m = E_{m_A} = E_{m_B} = cste$ donc $\Delta E_m = E_{m_B} - E_{m_A} = \ldots$ d'où :

Salviati : Cette relation dite de **conservation de l'énergie mécanique** est très utile dans les exercices d'énergie où on cherche une vitesse ou hauteur, initiale ou finale.

2 . Théorème de l'énergie potentielle (TEP)

Soit un système soumis à une seule force conservative $\vec{F}$.

Conservation de l'énergie mécanique : $dE_m = \ldots \quad \Leftrightarrow$

La définition du gradient permet d'écrire : $dE_C =$ où on a choisi $f = E_P$.

Par ailleurs, le TEC donne : et par identification :

D'une part, toute force **conservative** .... *i.e.* si la force est conservative alors ....

D'autre part, d'après la différentielle de E_C : $\boxed{}$ (TEP)

Expressions du travail élémentaire d'une force $\delta W\left(\vec{F}\right)$

avec la puissance :	avec la force :	avec l'énergie potentielle :

On intègre sur un chemin AB :

D'où le TEP sous forme intégrale : $\boxed{W_{AB}\left(\vec{F}\right)=}$

Salviati : Il y a autant de TEP que de force conservative, c'est ce qu'indique l'indice $_F$.

3 . Energie potentielle de pesanteur E_{PP}

Soit un système soumis à son poids : $\vec{P}=m\vec{g}$ où m est la masse en kg et $\vec{g}$ le champ de pesanteur uniforme en m.s^{-2}. Le poids est un vecteur constant donc il dérive d'une énergie potentielle appelée **énergie potentielle de pesanteur** et notée ....

➢ Pour le parachutiste où on a choisi un axe Oz vers le **haut** : (chapitre II page 4)

1)

Par identification :

2) Par identification :

avec C la constante d'intégration à déterminer avec les conditions aux limites

3) On choisit une énergie potentielle nulle à l'origine : .... $=$... or .... $=$...

Donc $C=$... et $\boxed{E_{PP}\left(z\right)=}$ axe Oz, vertical, **vers le haut**, $E_{PP}\left(z=0\right)=0$

Salviati : Comme l'énergie potentielle est une primitive de la force, elle est toujours définie à une constante d'intégration près tout comme le potentiel électrique en ARQS pour lequel on choisit un potentiel de référence nul, la terre ou la masse. Ce n'est pas un hasard s'ils portent le même terme "potentiel". D'ailleurs, en mécanique quantique, E_P se note V.

Si le parachutiste tombe à partir d'une hauteur z_1 jusqu'à une hauteur $z_2 < z_1$, alors :

$\Delta E_{PP} =$ car $z_2 < z_1$

Autrement : $\Delta E_{PP} =$

Donc $\Delta E_{PP} =$

La variation d'énergie potentielle est ....

D'après le TEP, . Le travail est ....

Le parachutiste .... de l'énergie du poids *i.e.* du travail lors de sa chute ce qui ....

D'après le TEC, Sans frottement, l'énergie potentielle est convertie en .... ce qui permet au parachutiste ....

➢ Pour le pendule simple où on a choisi un axe Ox vers le **bas** : (chapitre II page 16)

1)

Par identification :

2) Par identification :

avec C la constante d'intégration à déterminer avec les conditions aux limites

3) On choisit une énergie potentielle nulle à la verticale : .... $=$... or $x =$

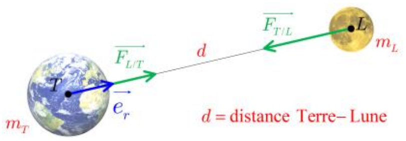
Donc

$$\boxed{E_{PP}(\theta) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

axe Ox, vertical, **vers le bas**, $E_{PP}(\theta = 0) = 0$

Salviati : Les expressions d'une même énergie potentielle peuvent être très différentes selon le choix de l'axe, de son orientation et des conditions aux limites du problème.

4 . Energie potentielle gravitationnelle E_{PG}



On considère à nouveau le système Terre-Lune (chapitre II page 5)

On peut généraliser la Lune L à tout satellite en supposant que la force est conservative :

1)

Par identification :

2) Par identification :

3) Il est logique de penser que loin de la Terre, l'attraction n'a plus d'effet sur le satellite donc on choisit comme condition limite : .... $=\ldots$ L'expression donne $E_{PG}=\ldots$

Donc $C=\ldots$ et $\boxed{E_{PG}=\qquad\qquad}$ (coordonnées cylindriques, annulation à l'infini)

On remarque que si ...... alors ...... : comportement similaire si ...... alors ......

Si le satellite passe d'une orbite de rayon r_1 à une orbite de rayon $r_2<r_1$, alors :

$\Delta E_{PG}=$

$=$ car $r_2<r_1$

La variation d'énergie potentielle est **..................**
Le comportement est similaire à celui de l'énergie potentielle de .... : l'énergie potentielle augmente à mesure qu'on s'éloigne du sol terrestre *i.e.* à mesure que ....

D'après le TEP, . D'après le TEC,

Le travail est **..................** Le satellite .... de l'énergie de la force gravitationnelle.

5 . Energie potentielle élastique E_{Pe}

On considère une masse m accrochée à un ressort **horizontal** de raideur k soumis **uniquement** à la force de rappel élastique (chapitre II page 10). Soit $x(t)=l(t)-l_0$ le déplacement selon l'axe Ox de la masse par rapport à sa position d'équilibre. La force de rappel élastique s'oppose au mouvement et tend à ramener la masse à l'équilibre.

1)

2) Par identification, (ne pas oublier le signe moins devant le gradient)

D'où où C dépend des conditions aux limites

Salviati : On distingue les conditions **initiales** à $t=0$ liées au temps des conditions **aux limites** liées à l'espace lorsque $x=0$, $\theta=0$, $r=0$, $r\to+\infty$, etc…

4) On suppose qu'à l'équilibre $l=l_0$, l'énergie potentielle est nulle : …………… $=$…

Or …………… $=$… donc $C=$… et $\boxed{E_{P\acute{e}} = \qquad\qquad\qquad}$ $k=cste$, $E_{P\acute{e}}(0)=0$

Méthode de détermination de l'énergie potentielle :

1) On exprime la force conservative $\vec{F}$ en fonction des **vecteurs unitaires** de la base.
2) On identifie les ………………………… de E_P puis on …………… par rapport à l'espace
3) On détermine …………………………………………… à l'aide des conditions aux limites.

6. Propriétés de la force conservative

Pour une force **conservative**, le TEP donne :

Pour le chemin opposé de B vers A,

$\Leftrightarrow$, le travail ne dépend pas du chemin suivi : $W_{AB}\left(\vec{F}\right)=W'_{AB}\left(\vec{F}\right)$

Salviati : On peut le vérifier en échangeant z_1 et z_2 pour E_{PP} ou r_1 et r_2 pour E_{PG}.

Une force conservative $\begin{cases} \text{……………………………………………………………………………} \\ \text{……………………………………………………………………………} \\ \text{……………………………………………………………………………} \end{cases}$

Pour le frottement, d'après page 4 : $\delta W_{AB}\left(\vec{T}\right)=-T\,dx$ donc $W_{AB}\left(\vec{T}\right)=$

$\delta W_{BA}\left(\vec{T}\right)=$ donc $W_{BA}\left(\vec{T}\right)=$

$$W_{AB}\left(\vec{F}\right)+W_{BA}\left(\vec{F}\right)=2W_{AB}\left(\vec{F}\right)\neq 0$$

Pour la force de frottement $\vec{T}$, le travail est toujours …………………, l'énergie potentielle ………………… et le travail des frottements …………………………………

C . Théorème de l'énergie mécanique (TEM)

D'après le TEC, on peut dissocier les forces conservatives et non conservatives :

$dE_C =$

D'après le TEP, chaque force **conservative** d'indice i dérive d'une énergie potentielle :

$dE_{Pi} =$

La définition de la variation d'énergie mécanique s'écrit : $dE_m \overset{\text{déf}}{=}$

$\Leftrightarrow \quad dE_m =$ $\qquad \Leftrightarrow \quad \boxed{dE_m = \qquad}$ (forme infinitésimale)

D'où le théorème sous forme **intégrale** : $\boxed{\Delta E_m = \qquad}$

Salviati : La perte ou le gain d'énergie mécanique **ne signifie pas** la perte ou le gain de vitesse ou l'arrêt du mouvement, cela signifie juste qu'une partie de l'énergie du système est dissipée vers l'extérieur. C'est l'énergie cinétique qui donne les infos sur la vitesse.

Au passage, on peut écrire : $dE_m =$

cinétique	mécanique
TEC :	TEM :
TPC :	

Par analogie avec les théorèmes de l'énergie cinétique, le fait que la dérivée de l'énergie mécanique soit égale à tout instant à la puissance résultante des forces …………… ……………………………… peut être appelé le ………………………………………………

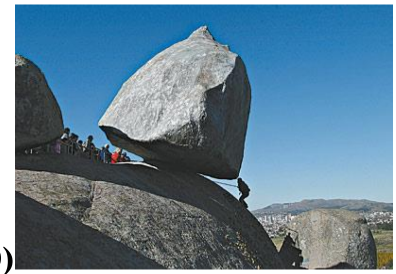
Pour le skieur, le TEM donne : $\Delta E_m = W_{AB}\left(\vec{T}\right)$ et le TPM donne : $\dfrac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}\left(\vec{T}\right)$

III . Mouvement conservatif à 1D

Objectif : Déterminer mathématiquement les positions d'équilibre d'un système.

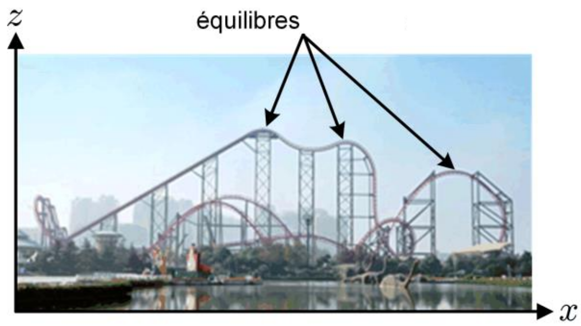
1)  2)  3) 

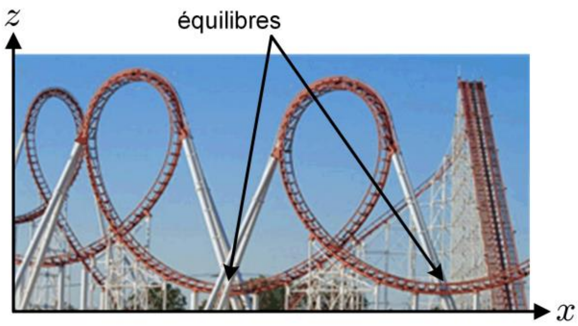
S'agit-il d'équilibres stables, instables ou de systèmes hors équilibre ?

4) 
5) 
6) 
7) 
8) 
9) 

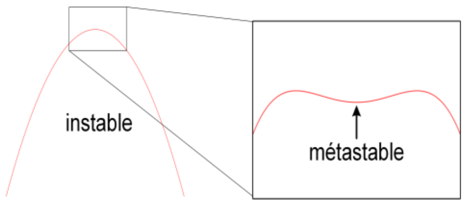
Les images 2) et 4) représentent des équilibres ……………, un petit apport d'énergie au système ne va modifier que très peu son mouvement et va le ramener à sa position d'équilibre. Les images 1) et 6) représentent des systèmes ……………………… *i.e.* le système est en cours de déplacement vers une position d'équilibre, à rapprocher des régimes transitoires en électricité. Les autres images représentent des équilibres …………… où il suffit d'un petit apport d'énergie pour modifier le système ou le mettre en mouvement vers un autre état d'équilibre sans qu'il revienne en général vers cet état d'équilibre. Dans la réalité, les équilibres instables n'existent pas car il ne faut pas en général un petit apport d'énergie mais un apport d'énergie suffisant ………………………………… comme dans l'image 9, on parle d'équilibre ……………………, un équilibre pseudo-stable.

Il est facile de distinguer les équilibres stables et instables sur des montagnes russes :





On suppose un axe vertical Oz repérant la côte z d'un wagon de montagne russe assimilé à un point M en fonction de l'abscisse d'un axe horizontal Ox.



Lorsque z est maximale, il s'agit d'un équilibre …………
Lorsque z est minimale, il s'agit d'un équilibre ………… (ou métastable).
Cela tient au fait que l'énergie potentielle est proportionnelle à la côte z : $E_{PP} \propto z$.

Si $z = f(x)$ la fonction qui suit les montagnes russes alors $E_{PP} =$

C'est donc l'énergie potentielle qui est responsable des **positions d'équilibre**.

A . Equilibres d'un système

Soit un système à un seul degré de liberté *i.e.* à une dimension qu'on notera r.
Cela peut être la coordonnée polaire r mais aussi une longueur x ou un angle θ.
Soit $\vec{F} = \sum \overrightarrow{F_{ext}}$ la résultante des forces qui s'appliquent au système.

Si le mouvement est **conservatif**, la force est conservative donc elle dérive d'une énergie potentielle : $\vec{F} =$. Si le mouvement est à **une dimension**, $E_P = E_P(r)$ donc :

$$\vec{F} =$$

$\alpha = 1$ sauf lorsque r n'est pas une longueur (voir page 19 avec le pendule simple)

Soit $r = r_{éq}$ la valeur de r à l'équilibre. Si le système est à l'équilibre, **le principe d'inertie s'applique** donc sa vitesse est .... donc il n'est soumis à ....

Il faut donc que $\vec{F} = \ldots \quad \Leftrightarrow$ lorsque $r = r_{éq}$.

$\boxed{\text{..}}$

Si l'équilibre est un .... alors la courbe .... **puis** .... donc la dérivée 1ère est .... puis passe par zéro puis devient ...., E'_P est donc .... donc la dérivée seconde E''_P est **positive** pour un minimum.

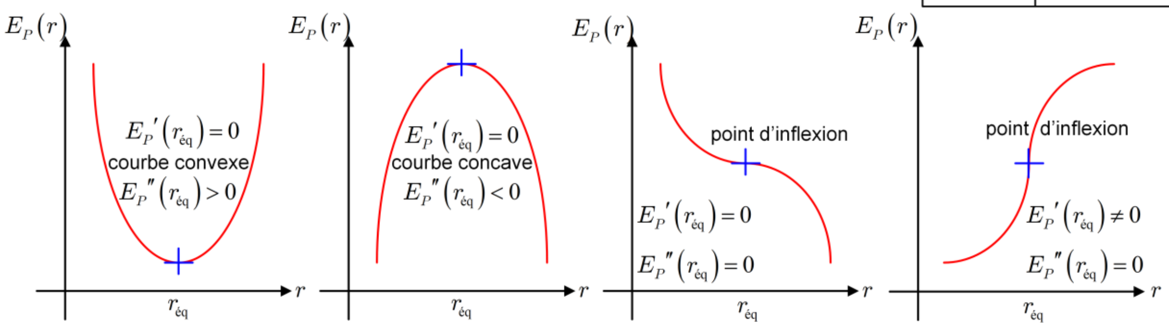
r	$r_{éq}$
$E_P(r)$	
$E'_P(r)$	
$E'_P(r)$	
$E''_P(r)$	

$\boxed{\text{...}}$

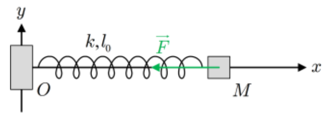
....
....
....
....

r	$r_{éq}$
$E_P(r)$	
$E'_P(r)$	
$E'_P(r)$	
$E''_P(r)$	

$\boxed{\text{...}}$



B. L'oscillateur harmonique (2ème partie)



L'oscillateur harmonique est soumis à une énergie potentielle $E_{P\acute{e}}(l)=\dfrac{1}{2}k\left(l-l_0\right)^2$.

Pour un oscillateur horizontal, on a pris $x=l-l_0$ donc $E_{P\acute{e}}(x)=\dfrac{1}{2}kx^2$.

Au passage, $\vec{F}=$, force de rappel élastique.

1. Puits de potentiel

On cherche les équilibres tels que $\dfrac{dE_{P\acute{e}}}{dx}=0 \quad \Leftrightarrow$

Le seul équilibre est en $x=\ldots$ donc lorsque $l=\ldots$ ....

On calcule la dérivée 2nde : $\dfrac{d^2E_{P\acute{e}}}{dx^2}=\ldots$ en $x=x_{\acute{e}q}$: $\dfrac{d^2E_{P\acute{e}}}{dx^2}\left(x=x_{\acute{e}q}\right)=\ldots\ldots\ldots$: équilibre ....

L'oscillateur harmonique oscille ....

Si on introduit des frottements, il ....

$\overrightarrow{\text{grad}}\,E_{P\acute{e}}=\dfrac{dE_{P\acute{e}}}{dx}\vec{e_x}$ donc :

↳ Si $E_{P\acute{e}} \nearrow$,

↳ Si $E_{P\acute{e}} \searrow$,

Le gradient s'oriente vers .... tandis que le système s'oriente vers .... donc vers ....

Si $E_{PP}\to+\infty$ lorsque $x\to\pm\infty$ (les deux), alors le système est dans un ....

Si la courbe de E_P est une ...., c'est un ....

2. Positions de vitesse nulle

Pour le système masse-ressort horizontal,

L'énergie cinétique est telle que $E_C=\dfrac{1}{2}mv^2\geq 0 \quad \Leftrightarrow$

Soit la position $x=X$ pour l'oscillateur sur l'axe des abscisses.

➤ Si $E_m=E_{P\acute{e}}\left(x=X\right) \quad \Leftrightarrow$, il s'agit d'une ....

C'est le cas dans le cours de Dynamique page 14 : $E_{m1}=$

Avec la condition $x\left(t=0\right)=X$, sans vitesse initiale, l'oscillateur "...................."...........

➢ Si $E_m > E_{Pé}(x = X)$ $\Leftrightarrow$ non nulle, l'oscillateur est en mouvement.

On choisit la condition initiale $x(t=0) = X$ et une vitesse initiale $v(t=0) = v_0$:

$E_{m2} =$

$=$

$=$

car $E_{Pé}(t=0) = \frac{1}{2}kx^2(t=0) = E_{Pé}(x=X)$

On se trouve bien dans le cas où $E_m > E_{Pé}(x=X)$. Soit $x = X_m$ la position de l'oscillateur lorsque celui-ci "s'arrête" *i.e.* lorsque la vitesse s'annule *i.e.* $E_C = 0$:

$E_{m2} =$

car $\omega_0^2 = \dfrac{k}{m}$

Avec ces conditions initiales, l'oscillateur harmonique s'arrête et repart en $x = \ldots\ldots$

En positionnant l'énergie mécanique sur le graphe d'énergie potentielle, on peut en déduire qualitativement ...., et en particulier, ...

3 . Approximation par un puits de potentiel harmonique

Toute fonction à une variable $f(x)$ peut s'écrire sous la forme d'un polynôme de degré infini appelé **série de Taylor-MacLaurin** : $f(x) = \ldots$

Comme en électricité, au chapitre V Filtrage linéaire pages 3,4, lorsque $x \ll 1$ ou $x \gg 1$, on peut réaliser des approximations qu'on appelle des **..** (DL).

➢ Lorsque le DL est donc en $x = 0$ alors $a_n =$, $\forall n \in \mathbb{N}$ avec $0! = 1$:

$f(x) =$ où $f^{(1)} = f'$, $f^{(2)} = f''$, $f^{(3)} = f'''$, etc…

Pour l'exponentiel, $f^{(n)}(x) = \ldots \Rightarrow f^{(n)}(0) = \ldots = \ldots$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $e^x =$

Autre exemple : $\forall x > 0$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \alpha(\alpha-1)\dfrac{x^2}{2} + \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dfrac{x^3}{6} + \ldots$

Exemple avec $\alpha = ½$ en référence au chapitre II Ondes et signaux page 13 :

$(1+x)^{1/2} =$ A l'ordre 1, $\sqrt{1+x} \approx$

Un développement limité à l'ordre n en sciences physiques est une
..

Exemple avec le sinus : $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots$

A l'ordre 0 : $\sin(x) \approx \ldots$, à l'ordre 1 : $\sin(x) \approx \ldots$, à l'ordre 2 : $\sin(x) \approx \ldots$ car pas d'ordre 2.

A l'ordre 3 : $\sin(x) \approx$, ordre 4 : $\sin(x) \approx$, ordre 5 : $\sin(x) \approx$, etc…

➢ Lorsque x n'est pas proche de 0 mais d'une valeur $x_{éq}$ donc lorsque $x - x_{éq} << 1$ alors :

$f(x) =$ (DL en $x = x_{éq}$)

Comme d'habitude, la notation de Leibniz est plus lourde mais plus précise :

$f(x) =$ car $1! = 1,\ 2! = 2$

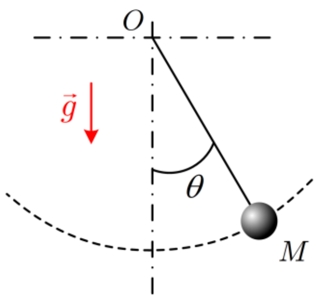
Salviati : De façon condensé, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_{éq})}{n!}(x - x_{éq})^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^n f}{dx^n}(x_{éq}) \frac{(x - x_{éq})^n}{n!}$

On s'intéresse à une énergie potentielle $E_P(r)$ qui possède un équilibre **stable** en $r = r_{éq}$ alors lorsque r a une valeur proche de $r_{éq}$ donc lorsque $r - r_{éq} << 1$ ou lorsque $r = r_{éq} + \varepsilon$ avec $\varepsilon << 1$ alors un développement limité **à l'ordre 2** pour l'énergie potentielle donne :

$E_P(r) \approx$ or $\frac{dE_P}{dr}(r_{éq}) = \ldots$ car c'est un équilibre.

Et en posant $\frac{d^2 E_P}{dr^2}(r_{éq}) = k > 0$, $\boxed{E_P(r) \approx \qquad\qquad\qquad}$ (DL en $r = r_{éq}$)

Le terme de droite ressemble à l'énergie potentielle de .... (page 12). Toute énergie potentielle à proximité d'un équilibre stable peut donc s'écrire comme une fonction .... en r^2, le .... de l'énergie potentielle est l'approximation par un puits de potentiel **harmonique**.



C . Le pendule simple (2ème partie)

L'énergie potentielle de pesanteur du pendule s'écrit :

$E_{PP}(x) = E_{PP}(\theta) =$ (page 10)

car $x = L\cos\theta$, $L = cste$

1 . Energie mécanique

Le pendule est également soumis à la tension du fil $\vec{T}$ mais en utilisant la définition de la puissance en coordonnées cylindriques :

$\mathcal{P}\left(\vec{T}\right) =$ car $\vec{e_r}.\vec{e_\theta} = 0$. Donc $\delta W\left(\vec{T}\right) =$

La tension du fil .... car elle est en permanence orthogonale au mouvement.

L'énergie cinétique s'écrit : $E_C = \frac{1}{2}mv^2 =$ car $\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ (chapitre II page 16)

D'après la définition de l'énergie mécanique : $E_m =$

Il s'agit de .... du mouvement. Il s'agit d'une équation différentielle du 1er ordre, à coefficients constants, non linéaire. On ne peut pas la résoudre analytiquement.

➢ **Cas sans frottement :**

On suppose que l'énergie mécanique est constante, on dérive **par rapport au temps** :

… (tableau pages 2 et 3 de la fiche sur les différentielles)

En simplifiant par $mL^2\dot{\theta}$, on retrouve : (le cas $\dot{\theta} = 0$ n'a pas d'intérêt)

➢ **Cas avec frottement :**

L'énergie mécanique n'est plus constante :

Pour déterminer la dérivée par rapport au temps de l'énergie mécanique E_m, on s'intéresse à la puissance de la force de frottement : $\vec{f} =$. La puissance s'écrit :

$$\mathcal{P}\left(\vec{f}\right) =$$

D'après le théorème de la puissance mécanique (TPM), d'où :

…

En simplifiant par $mL^2\dot{\theta}$ et en réarrangeant : (chapitre II page 17)

2 . Positions d'équilibre

Il y a équilibre lorsque la dérivée de l'énergie potentielle .... :

…

Les angles $\theta = 0$ et $\theta = \pi$ (modulo 2π) sont des équilibres pour le pendule simple.

La stabilité se détermine en trouvant ……………………………………………. **à l'équilibre** :

. Il faut alors étudier ……………………………………………

Si

Si

L'énergie potentielle du pendule simple est un cosinus inversé d'amplitude mgL et décalé vers le haut de mgL. Le minimum correspond donc au ……………………………………………
Concernant l'autre équilibre, il correspond à une position ……………………………………, si on l'écarte légèrement de cette position, il va se mettre à osciller. En présence de frottements, il va finir par s'arrêter en $\theta = \ldots$ sans revenir à sa position en $\theta = \ldots$, c'est donc bien une position d'équilibre **………………**

3 . Puits de potentiel harmonique

Pour le pendule, l'équilibre stable est $\theta_{éq} = \ldots$ S'intéresser à des valeurs d'angle proche de $\theta_{éq}$ revient à réaliser l'approximation des petits angles $|\theta| << \pi$. Deux manières de faire :

1) DL du cosinus à l'ordre 2 : si $\theta << 1$ alors $\cos\theta \approx$ donc :

$$\ldots$$

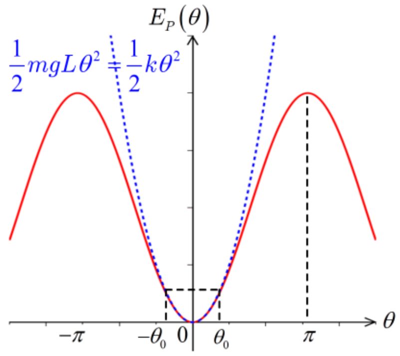
2) Utilisation de la formule encadrée page 18 : $\ldots$

$E_P\left(\theta_{éq}\right) =$, $k =$ donc $E_{PP}\left(\theta\right) =$

Salviati : La 1ère méthode est nettement plus simple pour le pendule simple mais pour d'autres énergies potentielles où $r_{éq} \neq 0$, la 2ème méthode peut parfois être plus rapide.

Par cette approximation des petits angles, on ramène le problème du pendule simple à un ………………………………… où on obtient une analogie avec le système masse-ressort.

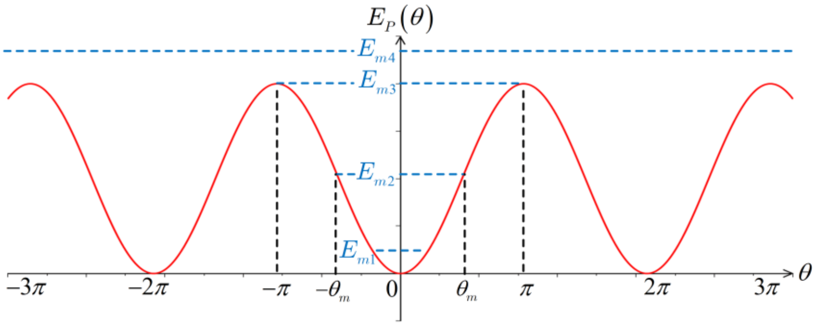
masse-ressort	pendule simple ($\theta << \pi$)
$E_P(x) = \frac{1}{2}kx^2$	
$\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$	
C.I. : $x(0) = X, \dot{x}(0) = 0$ $x(t) = X_0 \cos(\omega_0 t)$	



Pour un lâcher sans vitesse initiale avec $\theta_0 << \pi$, le pendule simple a un comportement ……………… *i.e.* son énergie potentielle peut être considérée comme un puits de potentiel …………………… Il oscille avec une période $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{L/g}$ comme vu au chapitre II.

4 . Positions de vitesse nulle

On peut aussi étudier l'énergie potentielle selon les valeurs de …………………………… :



➢ Lorsque $E_m << mgL$, on se trouve dans le cas de E_{m1} où les angles restent petits : $\theta << \pi$ et où le pendule simple ……………………………………… ……………………………………

➢ Lorsque $E_m < 2mgL$ mais non négligeable devant mgL, on se trouve dans le cas de E_{m2} où le pendule est ……………………………… mais son comportement est ……………………
Le pendule va osciller entre θ_m et $-\theta_m$ de vitesse nulle avec un mouvement périodique où sa période T ne sera plus la constante T_0 mais ………………………………………………

La position θ_m est donnée par la relation page 17 : $\theta_m = \sqrt{\qquad\qquad}$ où $\omega = \frac{2\pi}{T}$

où L est la longueur du pendule et (θ_0, v_0) les conditions initiales

➢ Lorsque $E_m = 2mgL$ alors on se trouve dans le cas improbable de E_{m3}, les intersections entre l'énergie mécanique et la courbe de l'énergie potentielle donnent les points de vitesse nulle d'après la page 16. Le pendule s'arrête sur ……………………………………………………

➢ Lorsque $E_m > 2mgL$, on se trouve dans le cas de E_{m4}, $E_m \ldots E_P$ donc $E_C \ldots 0$ et $v \ldots 0$
L'énergie mécanique est tellement ……….. que ……………………………………………………

Table des matières